

1910.

No. 9.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. v. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 32. HEFT 4.

DER GANZEN REIHE 337. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE.
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1910.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.
(Ausgegeben am 21. Juni 1910.)*

I n h a l t.

	Seite
1. J. E. Lilienfeld. Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum	673
2. A. Heydweiller und F. Kopfermann. Zur Kenntniss der Glaselektrolyse.	739
3. A. Sommerfeld. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra	749
4. L. Hopf. Turbulenz bei einem Flusse	777
5. Martin Knudsen. Ein absolutes Manometer	809
6. J. Koenigsberger und K. Kilchling. Über das Verhalten gebundener Elektronen gegen elektromagnetische Strahlung in festen Körpern. Zweiter Teil	843
7. Hans Happel. Nachtrag zu meiner Entgegnung auf die Arbeit von Hrn. Rudolf: Die Edelgase und die Zustandsgleichung. II	868
8. A. Schmauss. Aufnahme von Elektrizität aus der Luft durch fallende Wassertropfen	871
9. Clemens Schaefer. Über die Bestimmung der Elektronenzahl aus der Dispersion	883

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Chemikalien und Reagentien

für chemische, therapeutische, photographische, bakteriologische und sonstige wissenschaftliche Zwecke empfiehlt in **bekannter Reinheit** zu **entsprechenden Preisen**

E. Merck chemische Fabrik Darmstadt.



1. *L*

Nicht
 § 2. Das
 Stellung
 hang
 gefüllten
 der Er
 § 3. Ab
 perimen

schein
 suchu
 Diese
 trisch
 auftre
 dente
 aber,
 gradi
 die z
 Poter
 nicht,
 von I
Druck
 daß
 güt,
abnehm

Gümm
 22. M
 Leipzi
 „Woh
 Am

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 32.

1. Die Elektrizitätsleitung im extremen Vakuum; von J. E. Lilienfeld.

(Leipziger Habilitationsschrift.)

Inhalt: I. Einleitung. — II. Die Fluoreszenzfarben des Glases an der positiven Lichtsäule. — III. Die experimentelle Anordnung. § 1. Die Herstellung des Vakuums. § 2. Das Entladungsröhr. § 3. Der Kryostat. § 4. Die elektrische Meßeinrichtung. § 5. Darstellungsweise der Diagramme; Tabellen. — IV. Beobachtungsergebnisse. § 1. Zusammenhang zwischen Potentialgefälle, Stromdichte, Vakuum. § 2. Beeinflussung des Potentialgefälles durch die geometrischen Verhältnisse; Spektralbeobachtungen. — V. Eine Deutung der Ergebnisse. § 1. Allgemeines. § 2. Die Unabhängigkeit vom Röhrenquerschnitt. § 3. Ableitung des Gesetzes der Charakteristik. — VI. Zusammenfassung. § 1. Die experimentellen Befunde. § 2. Die allgemeinen Schlüsse.

I. Einleitung.

Im Herbste des Jahres 1906 lenkte eine auffallende Erscheinung meine Aufmerksamkeit auf das Gebiet, dessen Untersuchung mir den Stoff zu der vorliegenden Arbeit lieferte. Diese Erscheinung — eine rote, längs der Bahn der elektrischen Entladung im Vakuum unter bestimmten Umständen auftretende Fluoreszenz — erwies sich bald als etwas Akzidentelles und Unwichtiges den neuen Gesetzmäßigkeiten gegenüber, zu deren Feststellung sie in der Entladung bei hochgradigem Vakuum später führt. Es waren dies Tatsachen, die zunächst mit der Entdeckung zusammenhingen, daß das Potentialgefälle in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung nicht, wie aus plausiblen Gründen allgemein angenommen und von Herz¹⁾ experimentell gefunden wurde, bei abnehmendem Drucke unbegrenzt abnimmt und sich der Null nähert, sondern daß dieses Verhalten nur bis zu einem gewissen Maximaldrucke gilt, von welchem ab das Gefälle wieder rapide zunimmt, bei abnehmender Gasdichte.²⁾ Das Verwunderliche lag darin, daß

1) H. Herz, Wied. Ann. 54. p. 49. 1898.

2) Vgl. drei aufeinanderfolgende Publikationen des Verfassers „Über Glimmentladung“. Verh. Deutsch. Physik. Ges. 8. 10. November 1906, 22. März 1907; Ber. d. Math.-Phys. Klasse d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. 9. 20. Juli 1908. Schließlich eine Publikation unter dem Titel „Welmlkathode bei hochgradigem Vakuum“. 9. 6. Januar—März 1908.

bei abnehmendem Drucke die mittlere freie Weglänge der geladenen stromtransportierenden Teilchen wächst, daß folglich, je tiefer das Vakuum, ein desto geringeres Hindernis sich dem Elektrizitätstransport in den Weg legen müßte.

Arbeitet man, um *rein technisch* die Sache zu vereinfachen und allzu hoch gespannte Ströme zu vermeiden, mit einer Oxydkathode nach Wehnelt¹⁾, und beobachtet, daß von einem gewissen Maximalwerte des Druckes abwärts, die Klemmenspannung des Rohres stark zunimmt, so wird man verleitet²⁾, dies so aufzufassen, als ob die Oxydkathode in diesem Gebiete aufhörte, ihre Eigenschaft der weitgehenden Erniedrigung des Kathodengefälles aufzuweisen. Eine Sondenmessung beweist jedoch, daß das Verhalten einer Oxydkathode in keiner Beziehung einer Änderung unterliegt; daß hingegen ein bedeutendes Potentialgefälle, verbunden mit einer intensiven Erhitzung der Glaswände in der *positiven Lichtsäule* bei abnehmendem Gasdrucke auftritt.

So war also der Gegenstand gegeben, an dem die Forschung ansetzen konnte: ein möglichst hochgradiges Vakuum sollte erzeugt werden; in diesem Vakuum sollte eine elektrische Entladung von einer Stromstärke eingeleitet werden, die größer als ein bestimmter Minimalwert zu wählen war; in tunlichst großer Entfernung von den Elektroden waren dann die Vorgänge zu untersuchen.

Man kann den gekennzeichneten Bedingungen des hohen Vakuums und der großen Stromdichte eine allgemeinere Fassung erteilen, indem man die Herstellung eines Zustandes fordert, *wo die räumliche Dichte der die Stromleitung besorgenden negativen Elektronen möglichst groß wird im Vergleich mit der Dichte der Gasmoleküle, wo also die Tendenz zur Ausbildung einer möglichst großen Volumenladung in der Strombahn besteht.*³⁾

1) Ich habe immer wieder mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß die Erscheinungen des behandelten Gebietes auch unter Zuhilfenahme gewöhnlicher Metallelektroden von großer Ausdehnung hergestellt werden kann. Vgl. z. B. Verh. Deutsch. Physik. Ges. 9. p. 126. 1907.

2) Diese Auffassung vertrat Fred Soddy, Physik. Zeitschr. 9. p. 1. 1908; vgl. meine Entgegnung, Physik. Zeitschr. 9. p. 6. 193.

3) Verh. Deutsch. Physik. Ges. 9. p. 127/128. 1907. Wie man des Näheren die Bedingung großer Elektronendichte in ihrer Wirkung auf die Materie aufzufassen hat, ist auf p. 734—735 der vorliegenden Arbeit erörtert.

Unter den so definierten Bedingungen traten Erscheinungen auf, welche der zweiten meiner auf p. 673 angeführten Publikationen zugrunde lagen, und auf das Vorhandensein von mit kleiner Masse behafteten Trägern positiver Elektrizität hinwiesen. Diese Erscheinungen konnten seitdem von mir zwar nicht einwandfrei reproduziert werden. Angesichts ihrer Wichtigkeit waren sie jedoch in erster Linie der Ansporn, die Elektrizitätsleitung in extremem Vakuum eingehend durchzuforschen, um die anfangs sehr variablen Bedingungen eindeutig kennen und beherrschen zu lernen. Die Ergebnisse der diesbezüglichen Studien bilden den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

Wenn auch ein direkter Beweis für die Existenz positiver Elektronen in den folgenden Resultaten nicht erbracht ist, so wird man eine Reihe von Zusammenhängen finden, welche in einfacher Weise auf Grund der Annahme positiver Elektrizitätsträger von einheitlichem Verhältnis der Ladung zur Masse dargestellt werden können; insbesondere also positiver Ladungen, welche unabhängig von der Materie bestehen.¹⁾ Deshalb mag die Frage nach der Existenz positiver Elektronen, soweit meine Untersuchungen in Frage kommen, vorläufig unentschieden gelassen werden; besonders auch, weil die an meine Arbeiten anschließenden Veröffentlichungen anderer Experimentatoren meines Dafürhaltens das Problem offen lassen. Ich vermag in der Tat weder in der Wiederholung eines Teiles meiner Versuche durch Gehrcke und Reichenheim²⁾, Bestelmeyer und Marsh³⁾, welche ein *negatives* Resultat ergaben, noch in den die Frage nach der Teilnahme positiver Elektronen, sowohl an der Gasentladung, als auch an der Lichtemission, *bejahenden* Versuchen von Jean Becquerel⁴⁾ ein endgültig entscheidendes Moment zu erblicken.

1) Über eine ähnliche, wenn auch wesentlich anders gemeinte Behauptung von J. J. Thomson vgl. man p. 716.

2) E. Gehrcke und O. Reichenheim, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1907. p. 593.

3) A. Bestelmeyer und S. Marsh, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1907. p. 758.

4) J. Becquerel, Vgl. eine Reihe von Arbeiten in „Le Radium“ 1907 und 1908, insbesondere 1908. p. 193.

II. Die Fluoreszenzfarben des Glases an der positiven Lichtsäule.

Bevor ich an den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Untersuchung herantrete, soll hier das Wesentlichste über die bereits erwähnte, zu Anfang der Arbeiten das erstmal von mir beobachtete rote Fluoreszenz aus meinen früheren Veröffentlichungen zusammengefaßt werden.

Die Fluoreszenz trat das erstmal gelegentlich eines anderen Experimentes auf.¹⁾ Ich benutzte eine Röhre von der Gestalt der Fig. 1. Zwei Glaskugeln G_1 , G_2 mit den

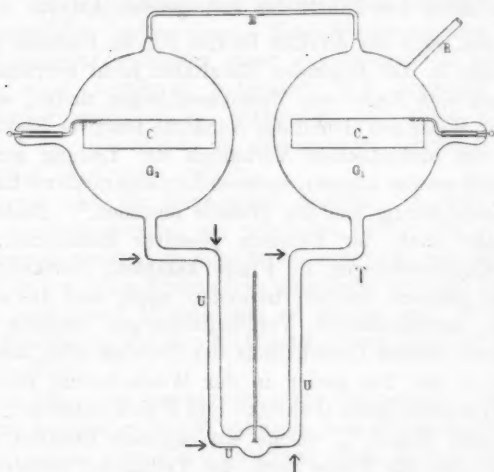


Fig. 1.

Zylinderelektroden C_- , C_+ waren durch das Rohr U (13 mm lichter Weite) verbunden. B ist ein Versteifungsbügel, aus einem Glasstab hergestellt, R der Anschluß an die Luftpumpe. Wurde diese Röhre mehrmals mit aus Kaliumpermanganat dargestelltem Sauerstoff gefüllt und unter Stromdurchleitung

1) Verh. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 11. 1906: „Eine Methode zur Bestimmung der Temperatur und der Wärmeleitfähigkeit des positiven Glimmlichtes“. Dann auch Verh. Deutsch. Physik. Ges. 8. p. 23. 1906: „Über neuartige Erscheinungen in der positiven Lichtsäule einer Glimmentladung.“

ausgepumpt, so ergab sich, daß wenn der Druck weniger als 0,01 mm Quecksilber und die Stromstärke etwa 20—30 Milliamp. betrug, zunächst bei dem Annähern eines Stahlmagnets an einem beliebigen Punkte des Rohres U ein roter Fleck erzeugt werden konnte. Wurde das Vakuum besser, dann erschienen an den mit Pfeilen bezeichneten Stellen kirschrote, von der durch Kanalstrahlen erzeugten Fluoreszenz wohl unterscheidbare Flecke. Ihr Spektrum beobachtete ich als ein kontinuierliches im roten Teile.¹⁾

Der Lage der Flecke nach wurden sie von einem im Sinne von der Kathode nach der Anode zu bewegten Träger erzeugt. Um die Erscheinung bei höherem Vakuum verfolgen zu können, ersetzte ich die Aluminiumelektrode C_- durch eine Oxydkathode. Wurde diese dann zum Beispiel an das mit — bezeichnete Rohr der Fig. 2 angesetzt und das nötige Vakuum geschaffen, so trat an der Stelle R die rote Fluoreszenz auf. Aus einem Ablenkungsversuche schloß ich, „daß nicht die negativen Korpuskeln für sich allein die rote Fluoreszenz erzeugen können, daß vielmehr noch ein zweiter Faktor dieselbe mitbedingt.“

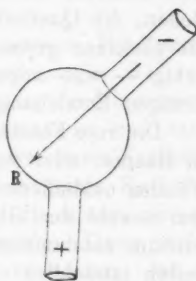


Fig. 2.

Ich vermutete in diesem zweiten Faktor, der die rote Fluoreszenz mitbedingt, positiv geladene Teilchen. Gleichzeitig meinte ich, daß das in der Einleitung dargestellte Minimum des Potentialgefälles, welches bei einem bestimmten Druck eintritt, „darauf hinweist, daß es nicht ausschließlich die von der Oxydelektrode emittierten Elektronen sind, welche, wie vielfach angenommen wird, die Entladung im hohen Vakuum bewirken, sondern daß für die Elektrizitätsleitung unter den erwähnten Umständen es sehr wesentlich auf einen zweiten

1) Verh. Deutsch. Physik. Ges. 9. p. 134. § 7. 1907. Gehrcke und Reichenheim (Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1907. p. 593) photographierten das Spektrum der Fluoreszenz und fanden zwei Banden zwischen 654 bis 620 μ mit Maximis bei 650 und 630 μ .

Faktor ankommt, der vielleicht durch die rote Fluoreszenz dem Auge bemerkbar gemacht wird“.

In der darauf folgenden Publikation (§ 7) wird die rote Fluoreszenz und weitere neue, unter ähnlichen elektrischen Bedingungen auftretende Fluoreszenzfarben des Glases wie folgt zum letzten Male erwähnt: „Sie tritt sowohl auf Glas als auch auf Quarz bei sehr hohem Vakuum ein, jedoch nicht bei den extremsten Graden der Evakuierung. Hat man nämlich die Gefäße durch anhaltende Entladung von den an den Wänden okkludierten Gasresten befreit, so wird bei Glas das ursprünglich kirschrote rotviolett bis blau mit einzelnen himmelblauen Stellen, die Quarzwände aber fluoreszieren dann himmelblau mit einzelnen grünen Stellen, manchmal auch noch andersfarbig — was angesichts der technologisch recht ungleichförmigen Entstehungsart der Quarzröhren erklärlich ist.

Die rote Fluoreszenz scheint folglich mit den Gasresten — im Raume, oder was wahrscheinlicher ist, mit den an den Wänden okkludierten — zusammenzuhängen. Die blaue mag dem sowohl den Gläsern als auch dem Quarz gemeinsamen Silicium entstammen. Ob und inwiefern aber diese Fluoreszenzen tatsächlich von der positiven Strahlung hervorgerufen, oder aber durch ihr Zusammenwirken mit den anderen Produkten des Entladungsvorganges erzeugt werden, mag vorläufig dahingestellt bleiben.“

Da von anderer Seite, zum Teil auch in den im folgenden angeführten Arbeiten, die Meinung geäußert wurde, daß in erster Linie die Beschaffenheit der Glasoberfläche für die Fluoreszenzfarbe maßgebend wäre, bemerke ich zusammenfassend, daß ich von Anfang an eine Ansicht vertrat, der zufolge die neuartigen von mir gefundenen Fluoreszenzfarben durch eine besondere Erregungsart hervorgerufen werden; eine Erregungsart, über die ich bis auf die wiedergegebenen Andeutungen, daß sie *nicht allein* von den auffallenden Kathodenstrahlen hervorgerufen wird, nichts Bestimmtes aussagte. Als Stütze für diese meine Auffassung führte ich schon in der ersten Publikation die Tatsache an, daß man durch das Annähern eines Magnets an die Kugel der Fig. 2 neben der roten Fluoreszenz die gewöhnliche grüne erzeugen kann. Auch gelingt es durch das Anbringen einer Hilfskathode, besonders auch

für
we
der
Bö
die
mü
an
der
ode
ver
Rol
erf

und
und
far
ein
str
str
die
wur
neu
inte
str
sich
keit
leic

wor
sau
ling
ben
Ent
Mar
Sau

1907

für den Fall der weniger ausgeprägten bläulichen Fluoreszenz, welche bei weitgehend entgasten Glaswänden auftaucht, nachdem die rote Fluoreszenz nach langanhaltender Belastung der Röhre verschwunden war, über diese fahlblaue Fluoreszenz die gewöhnliche gelbgrüne zu superponieren. Unter den vielen möglichen Ausführungsformen dieses Versuches sei hier die eine angegeben, wo der Platindrahring *Z* der Fig. 6 p. 685 während der Entladung durch einen großen Widerstand (Elektrolyt oder Sekundärspule eines großen Induktors) mit der Kathode verbunden wird; sofort wird die obere Mündung des engen Rohres E_2 von der gewöhnlichen Röntgenröhrenfluoreszenz erfüllt.

In einem gewissen Gegensatze zu meinen Erfahrungen und Ansichten stehen die folgenden Veröffentlichungen: Gehrcke und Reichenheim¹⁾ schrieben die Erregung der Fluoreszenzfarben dem Auftreffen von Kathodenstrahlen zu und sahen einfach in den Geschwindigkeitsunterschieden dieser Kathodenstrahlen das ausschlaggebende Moment; langsame Kathodenstrahlen sollten die rote und wohl auch die blaue, schnelle die gewöhnliche grüne Fluoreszenz hervorrufen. Diese Ansicht wurde dann von Reichenheim²⁾ dahin modifiziert, daß die neuen Fluoreszenzfarben, insbesondere die blaue, durch die intensive Emission von primären oder sekundären Kathodenstrahlen erregt werden. Auch berücksichtigt Reichenheim, sich den von mir vertretenen Ansichten nähernd, die Möglichkeit, daß auch Ionen (Kanalstrahlen) an der Erregung vielleicht teilnehmen könnten.

Schließlich ist von Goldstein³⁾ die Ansicht vertreten worden, als ob die rote Fluoreszenz mit der Anwesenheit einer sauerstoffreichen Gasfüllung zusammenhinge. In der Tat gelingt ihre Herstellung am besten auf dem von mir ursprünglich benutzten Wege, wenn man die Röhren unter Durchgang der Entladung mehrmals mit reinem Sauerstoff füllt und auspumpt. Man erhält insbesondere eine rote Fluoreszenz bei reiner Sauerstofffüllung, auch bei viel höherem Drucke, als es ohne

1) E. Gehrcke und O. Reichenheim, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1907. p. 593.

2) O. Reichenheim, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1909. p. 45.

3) E. Goldstein, Verh. Deutsch. Physik. Ges. 1907. p. 598—605.

Sauerstoff erreichbar wäre. Und zwar scheint der Druck beim Sauerstoff nach den größeren Werten hin unbegrenzt variiert werden zu dürfen, vorausgesetzt, daß man Stromdichten anwendet, die groß genug sind, um die bei höherem Druck zur Erzeugung der roten Fluoreszenz erforderlichen Energiemengen in der positiven Lichtsäule in Umsatz zu bringen.

Man kann jedoch die rote Fluoreszenz wie folgt auch *ohne Sauerstoffspülung* erzeugen. Wird die Röhre unter sehr starker Erhitzung der Glaswände stundenlang ausgepumpt, während die ebenfalls erhitzten Adsorptionsgefäße bei dem p. 681 ff. beschriebenen Evakuierungsverfahren Kohlenwasserstoffe abgeben, so erhält man eine Füllung, die wohl keinen Sauerstoff in merklichen Mengen enthalten kann und in der Tat ein Kohlewasserstoffspektrum emittiert. Sowie dann eines der Adsorptionsgefäße eine Zeitlang in flüssiger Luft eintaucht und die Entladung eingeleitet wird, beobachtet man unter fortbestehendem Kohlewasserstoffspektrum die rote Fluoreszenz, wenn auch nicht in der größten durch Sauerstoffdurchleitung erreichbaren Intensität. Auch andere, im Laufe der vorliegenden Arbeit erörterte Tatsachen (vgl. p. 708) deuten darauf hin, daß die Sauerstoffspülung unter gleichzeitiger Entladung lediglich den von mir schon in den ersten Publikationen behaupteten Wert eines bequemen Reinigungsmittels der Gefäßwände hat — welche Reinigung jedoch, wenn auch nicht ebenso gut, wie durch das Verbinden der beiden Verfahren, durch ein intensives Erhitzen des Rohres in Thermostaten ebenfalls erreicht werden kann.

In diesem Zusammenhange mag nicht unerwähnt bleiben, daß auch Konen¹⁾ die rote Fluoreszenz in Röhren beobachtet hat, welche ein reines Heliumspektrum gaben.

Schließlich sei noch angeführt, daß, wenn der erst seit kurzer Zeit erreichbare höchste Grad der Gasverdünnung hergestellt ist, die Fluoreszenz der Glaswände in einen eigentümlich fahlen Ton übergeht; und daß im allgemeinen durch das Eintauchen des Entladungsrohres in flüssige Luft keine auffällige Änderung der Farbentöne eintritt.

1) H. Konen, Verh. Deutsch. Phys. Ges. 1907. p. 704.

III. Die experimentelle Anordnung.

§ 1. Die Herstellung des Vakuums.

Im Laufe der Arbeiten hatte es sich ergeben, daß dem Prinzip, nach welchem das Vakuum herzustellen ist, falls man extreme Gasverdünnungen zu erreichen bestrebt ist, eine ebenso einfache wie einleuchtende Fassung gegeben werden kann: Man muß, besonders falls erhitzte Holzkohle und mit Dichtungsmitteln versehene Hähne und Schliffe in der Vakuumleitung vorhanden sind, das Entladungsrohr tunlichst vom ersten Anfang des Auspumpens an auf einer wesentlich höheren Temperatur halten, als die übrigen Teile der Leitung. In der Tat ist es klar, daß unter diesen Umständen das Hinüberdestillieren von Unsauberkeiten aller Art aus den erwähnten Unsauberkeitsquellen verhindert wird. Arbeitet man so, daß das Entladungsgefäß sich auf Zimmertemperatur befindet, so muß folglich ein Teil der Leitung, der nach Möglichkeit zwischen dem Entladungsrohr und den Schliffen sich befinden soll, in flüssige Luft tauchen. Werden aber die Holzkohlegefäße bei hoher Temperatur entgast, dann ist es unumgänglich nötig, gleichzeitig das Entladungsrohr auf eine mindestens ebenso hohe Temperatur zu bringen; und es ist günstig, andererseits einen Teil der Leitung mit flüssiger Luft zu kühlen.

Die Kokosnußkohle, welche als Adsorptionsmittel benutzt wird, muß bei einer jeden Herstellung der Luftleere auf über 400° erhitzt werden und durch eine möglichst schnell wirkende Luftpumpe (die Gaedesche Quecksilberluftpumpe) von den abgegebenen Gasen möglichst weitgehend durch stundenlanges Pumpen befreit werden. Ich fand es jedoch für günstig, nach einer mehrere Stunden lang andauernden Wirkungszeit der Gaedepumpe nachträglich noch eine Zeitlang eine weniger aus der Atmosphäre verschleppende Luftpumpe arbeiten zu lassen (die Neesensche Quecksilberluftpumpe in der Ausführung der Firma R. Burger & Co., Berlin). Erst dann wird zu einem kombinierten Adsorptionsverfahren unter Sauerstoffdurchleitung und Entladung geschritten.

Apparativ gestaltet sich die Sache wie folgt. Zum Erwärmen der Röhre, gleichgültig ob Adsorptionsgefäße oder Ent-

ladungsröhren erhitzt werden sollen, dienen Thermostaten verschiedener Größe von der Form der Fig. 3. Ein äußeres, mit Asbestpappe bewickeltes Eisenrohr A ist an beiden Enden offen und trägt in seinem Innern vermittelst der Winkelstücke W ein inneres Eisenrohr J , welches oben offen und unten mit einem Boden versehen ist. Zwischen den beiden Blechmänteln befindet sich ein Luftraum. In dem Raume H wird eine entsprechende Heizflamme (Gasbrenner usw.) aufgestellt. Man erkennt, daß es praktisch ist, falls man mit derartigen Thermostaten arbeiten will, die zu erhaltenden Apparate so zu bauen, daß ihre Hauptausdehnung möglichst in die vertikale Richtung fällt.

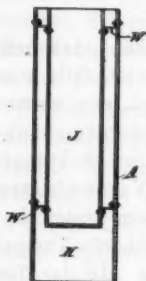


Fig. 3.

Die Vakuumleitung ist in Fig. 4 angegeben. Die schematisch angedeuteten Hähne H_3 und H_4 führen beziehungsweise nach der Gaede- und nach der Neesenpumpe. Die Adsorptionsgefäße A_1 und A_2 sind nach dem Schema einer Wasch-

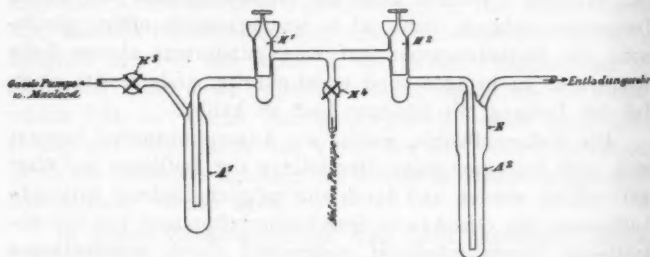


Fig. 4.

flasche gebaut, zu dem Zweck, die vor dem Gefäß befindlichen Teile der Leitung von den hinter dem Gefäß befindlichen ganz präzis voneinander zu trennen und dem Gefäße trotzdem die Form eines Rotationskörpers zu bewahren; dieses ist aus verschiedenen Gründen für den Einbau der Gefäße in die Thermostaten, Dewargefäße, Kryostaten von Wichtigkeit. Das Gefäß A_2 unterscheidet sich von dem Gefäß A_1 durch das Vorhandensein der Erweiterung E in seinem oberen Teile,

welche für das Einführen in den Kryostaten erforderlich ist. Das Gefäß A_1 dient zum Vorevakuieren der ganzen Leitung, nach dem zu Anfang erwähnten Prinzip, während das Gefäß A_2 durch eine etwa 25 bis 30 mm weite und möglichst kurze Verbindung an das Entladungsrohr anschließt und das Vakuum während der eigentlichen Untersuchungen aufrecht erhält. — Das Auspumpen gestaltet sich so, daß zu Anfang die Gefäße A_1 und A_2 sowohl wie das Entladungsrohr auf über 400° erhitzt werden und die Gaedepumpe in Verbindung mit der ganzen Leitung gesetzt wird. In dem allerersten Stadium des Auspumpens wird außerdem die Wehneltkathode auf helle Rotglut erhitzt, um auch hier eine möglichst weitgehende Entgasung von vornherein zu bewirken. Nachdem der Partialdruck über der erhitzten Holzkohle von der Größenordnung 0,0001 geworden ist (ein Macleodmanometer befindet sich an der Gaedepumpe) wird die Gaedepumpe abgestellt, der Hahn H_3 geschlossen, H_4 geöffnet und die Neesenpumpe in Gang gesetzt. Nach einer bis zwei Stunden läßt man dann das Gefäß A_1 abkühlen und taucht es in flüssige Luft, stellt die Neesenpumpe ab und läßt nun etwa drei Stunden lang die Reste in A_1 absorbieren. Dann wird der Hahn H_1 ebenfalls geschlossen, die Entladungsröhre nach erfolgtem Erkalten des Gefäßes A_2 aus dem Thermostaten entfernt und sofort durch einen intensiven Entladungsstrom erhitzt.¹⁾ Es wird mehrere Male aus dem an der Neesenpumpe befestigten Kaliumpermanganatgefäß (vgl. Fig. 5) die Leitung bis auf mehrere Millimeter Druck mit Sauerstoff gefüllt, durch die Neesenpumpe allmählich evakuiert und die letzten Gasreste allemal durch das Öffnen des Hahnes H_1 nach A_1 übergeleitet. Nachdem so eine auf Grund längerer Erfahrung leicht erkennbare Sauberkeit der Wände des Entladungsgefäßes erreicht ist, wird die Neesenpumpe abgestellt, der Hahn H_1 für einige Zeit geöffnet und unter anhaltendem Durchgang des Entladungsstromes zunächst alles übrigbleibende Gas tunlichst weitgehend in A_1 absorbieren gelassen. Darauf wird A_2 in flüssige Luft gesteckt, der Hahn H_2 geschlossen und nunmehr der endgültige Evakuierungsgrad nach entsprechend langer Entladung erreicht.

1) In diesem Stadium wird die p. 680 erwähnte rote Fluoreszenz in Abwesenheit des O beobachtet.

Das Permanganatgefäß der Fig. 5 besteht aus der das Permanganat enthaltenden Glaskugel *G*; der kapillare Haken *H* dient dazu, den größeren Staub beim Erhitzen des Permanganats zurückzuhalten, während der überaus feine dabei entstehende Staub in dem nach Art einer Waschflasche gebauten Gefäß *A* zurückgehalten wird. Das Gefäß wirkt in erster Linie durch Verlangsamung der Strömungsgeschwindigkeit; seine Wirksamkeit kann durch das Ausfüllen des Raumes zwischen der Kapillare *K* und der Wandung mit Glaswolle

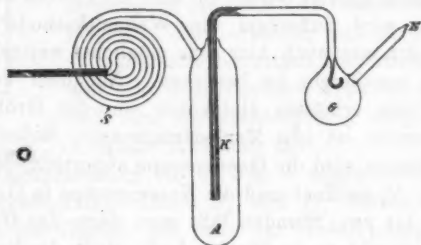


Fig. 5.

und durch das Einschalten einer kapillaren Spirale *S* erhöht werden. Außerdem kann man das Gefäß *A* in flüssiger Luft kühlen, wenn man die Feuchtigkeit etwa zurückhalten will, die beim Erwärmen des Permanganats frei werden könnte. Dieses hat aber einen ebensowenig merklichen Einfluß auf den Gang der Dinge, wie auch das Kühlen eines Teiles der eigentlichen Leitung zwischen den Schliffen und dem Gefäße *A*, der Fig. 2 durch flüssige Luft während der Sauerstoffspülung. Aus diesem Grunde wurde diese Komplikation meistens ausgelassen.

§ 2. Das Entladungsrohr.

Die Gesichtspunkte, von welchen aus das Entladungsrohr durchkonstruiert worden ist, sind die folgenden: *Erstens* soll, wie bereits bei der Beschreibung der Thermostaten erwähnt wurde, seine Hauptausdehnung in der Vertikale liegen. Dieses ermöglicht nicht nur das Erhitzen, sondern auch das Abkühlen des Rohres auf die Temperatur der flüssigen Luft. *Zweitens* soll für die Zwecke dieser Abkühlung, um flüssige Luft zu

sparen, die an der Wehneltkathode vom Heizstrom erzeugte Wärme außerhalb des Bades flüssiger Luft nach Möglichkeit abgegeben werden. Auch soll das von der glühenden Kathode abgegebene ausgesandte Licht tunlichst so abgeblendet werden können, daß spektrale Beobachtungen an der Entladung ungestört vorgenommen werden können. *Drittens* soll aber die Oxydkathode möglichst nahe an das Adsorptionsgefäß angeschlossen sein und im Gegensatz dazu durch möglichst lange und enge Röhren von der Stelle getrennt sein, an welcher die eigentliche Messung vorgenommen wird, zu dem Zwecke ein dynamisches Gleichgewicht zu erreichen, bei welchem die von der Kathode abgegebenen und von der Holzkohle aufgenommenen Gase möglichst wenig nach der Beobachtungsstelle hindiffundieren. Diese drei Gesichtspunkte ergeben die unsymmetrische reortorenähnliche Form der Entladungsröhre in Fig. 6. Die etwa 12 cm im Durchmesser besitzende Kugel *R* schließt einerseits an das Rohr *L*, welches nach dem Adsorptionsgefäß führt, andererseits an das weite Entladungsrohr *E*₁ (etwa 50 mm Durchmesser) an. Dieses verjüngt sich in seinem Fortlaufe zu dem etwa 10 mm im Lichten besitzenden Rohr *E*₂. In dem unteren Teile dieses

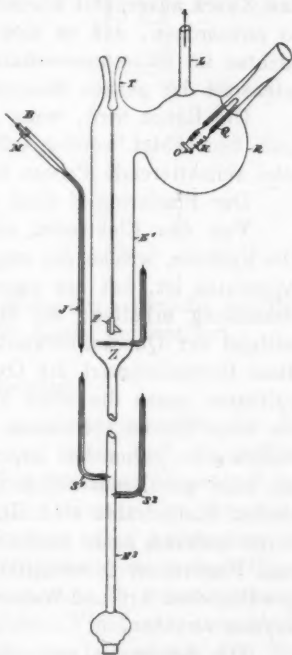


Fig. 6.

Rohres sitzen die der Messung des Potentialgefälles dienenden Sonden *S*₁ und *S*₂. Sie bestehen aus feinem Platindraht, der bis zur Mitte der Entladungsbahn reicht und enthalten Quecksilbernäpfe, welche an lange feine Glasröhren *J* angeschlossen sind. Die Glasnäpfe sind oben mit einer Erweiterung *M* ver-

sehen, in welche die Bernsteinstücke *B* luftdicht eingekittet werden. Diese Bernsteinstücke sind durchbohrt und vermitteln die Isolation des zum Elektrometer führenden Drahtes *D*. Der Zweck dieser Ausgestaltung ist der, die vorzügliche Isolation der Glaswände auszunutzen, welche eintritt, falls das Rohr in flüssige Luft taucht.

Der Rohransatz *T* dient dazu, verschiedene Vorrichtungen in die Röhre hineinzubringen. In der Figur ist er z. B. zu dem Zweck ausgenutzt worden, ein total reflektierendes Prisma *F* so anzuordnen, daß es eine Beobachtung der Verteilung des Lichtes im Röhrenquerschnitt vermittelt und auch die Lichtintensität der ganzen Röhrenlänge summiert.

Die Röhre wird, wenn bei der Temperatur der flüssigen Luft beobachtet werden soll, bis einige Zentimeter über das total reflektierende Prisma in flüssige Luft hineingebracht.

Der Platinring *Z* dient als Zündelektrode.

Von den Elektroden selbst ist nun folgendes zu sagen. Die Kathode, welche der empfindlichste Bestandteil des ganzen Apparates ist, hat die eigenartige auf der Figur ersichtliche Gestaltung erhalten; die Heizstromzuführung geschieht vermittelt der Quecksilberkontakte *Q*. Ich habe gefunden, daß diese Herstellungsart die Oxydelektrode nicht nur wesentlich haltbarer gegen die sonst übliche macht, sondern auch, daß die sonst Spuren von Gasen erzeugende Elektrolyse des heißen Glases hier vermieden ist, da zwischen den beiden Drähten ein kühl gehaltenes Stück des Glases sich befindet. An die beiden Platindrähte sind Kupferdrahtspiralen *K* angelötet, an deren anderem Ende kleine Stücke Platindrahtes den Übergang zum Platinblech *O* vermitteln. Dieses Platinblech wird in der gewöhnlichen Art und Weise mit einem Überzug von Erdalkalioxyden versehen.

Die Anode ist aus einem Platintopfe *T* in der aus der Fig. 7 ersichtlichen Art und Weise hergestellt, um die nicht unbedeutende, an ihrer Oberfläche abgegebene Wärme möglichst leicht nach außen abzuführen. In den letzten Versuchen habe ich den Platintopf durch ein vertikales Platinrohr (Fig. 8) ersetzt, welches den Vorzug hat, daß etwa vorhandene Unsauberkeiten sich nicht auf der von der Entladung benutzten Fläche ansammeln können. Außerdem ist bei einer derartigen Rohr-

anode der günstige Umstand zu verzeichnen, daß die Entladung sich gleichmäßiger über einen Teil der Oberfläche ausbreitet,

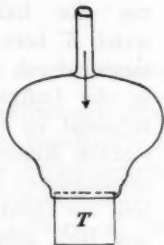


Fig. 7.

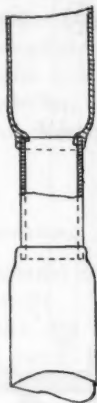


Fig. 8.

während sie sich sonst auf die Mitte des senkrecht zur Entladungsachse gelegenen Teiles der Anode konzentriert.

§ 3. Der Kryostat.

Der Kryostat, welcher es nicht nur gestattet, die Adsorptionsgefäße auf die Temperatur fester Luft abzukühlen, sondern auch für die Arbeiten mit flüssigem Wasserstoff verwendet werden soll, ist nach dem Prinzipie des Kryostaten von Kamerlingh Onnes¹⁾, natürlich unter Anbringung der für den speziellen Zweck nötigen Modifikationen, gebaut (Fig. 9). Er besteht aus einem weiten Messingrohr *M*, welches mit einer Lage Filz *F* und darüber mit Nickelblech *N* im Innern ausgekleidet ist. Unten ist dieses Rohr durch eine Lötung mit dem Neusilberrohr *S* verbunden, über welches die Gummikappe *G*₁ gespannt ist. Diese Gummikappe ist entsprechend durch eine siebartige Platte *P*₁ gestützt. Das Neusilberrohr ist mit Watte ausgefüllt, dann ist wieder eine siebartige Platte *P*₂ angeordnet,

1) H. Kamerlingh Onnes, Communications from the Phys. Lab. Leyden Nr. 94f. 12. p. 52.

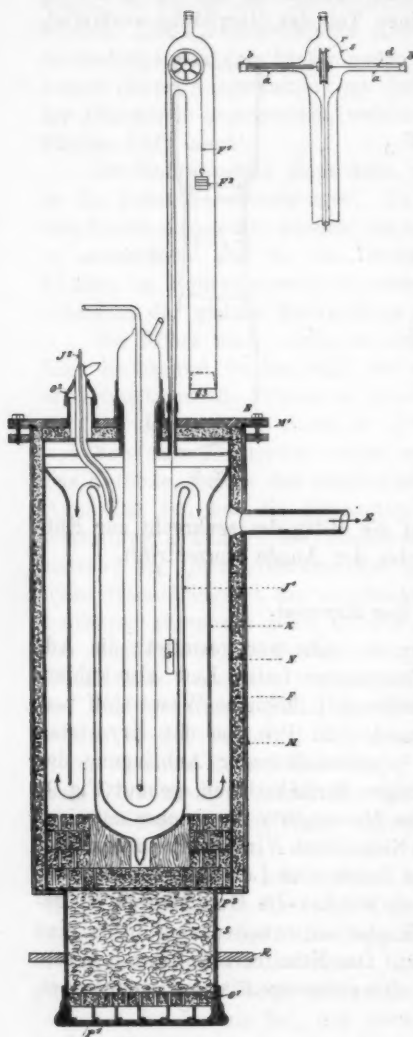


Fig. 9.

auf welcher eine Reihe Filzringe sowie ein Holzfuss befestigt sind, welcher letztere das Dewargefäß D_1 trägt. Die aus dem Dewargefäß verdampfenden Gase nehmen den durch die Pfeile angezeichneten Weg um die Kartonscheidewand K herum und gelangen durch das Rohr E in die Luftpumpe. Der Kryostat ist durch einen starken Messingdeckel M_1 verschlossen, in welchem sich die Dichtungsgrille B , mit Blei ausgefüllt, befindet. Eine Reihe von Schrauben ermöglicht es, den Deckel luftdicht auf dem Rohre M zu befestigen. Das doppelwandige Rohr D_2 , welches vermittelt einer Gummikappe G_2 eingeführt ist, dient zum Einfüllen der flüssigen Gase.

Der Neusilberring R ist mit Filz ausgelegt und bietet dem Adsorptionsgefäß, welches ebenfalls vermittelt einer Gummikappe eingedichtet ist, auf seinem abgeschrägten Rande festen Halt an der in Fig. 4 mit E bezeichneten Erweiterung.

Der Schwimmer S , welcher vermittelt des

Fadens F_1 und des Gewichtes F_2 es ermöglicht, den Stand der Flüssigkeit in dem Gefäß D_1 stets zu erkennen, ist in dem mit dem Gummipropfen G_3 abgeschlossenen Glasrohr, wie aus der Figur ersichtlich, angebracht. Aus der Profilsansicht ersieht man, wie die Rolle r in dem Glaskörper s auf der Drahtachse d angebracht ist, welche durch die Röhren a durchgeführt und in den Messingscheiben b befestigt ist.

§ 4. Die elektrische Meßeinrichtung.

Die Elektrometerzuführung wird mittelst der aus Fig. 10 ersichtlichen Schutzvorrichtungen hergestellt. Da die Entfernung des Elektrometers von der Stelle der Spannungsabnahme häufig variiert, ist es zweckmäßig, die Leitung so zu gestalten, daß ihre Länge bequem variiert werden kann. Zu diesem Zwecke besteht das Schutzrohr aus zwei übereinandergreifenden verschiebbar angeordneten Messingröhren R_1 und R_2 , während die Leitung selbst durch das feine Rohr L_1 und den darin verschiebbaren Draht L_2 mit den Klemmschrauben K gegeben ist. Die Röhren R sind mittelst der Gummistopfen G verschlossen, durch welche die Bernsteinisolierung B durchgeführt ist. In der Bernsteinisolierung sind nun die Leitungsverbindungen L befestigt.

Zur Messung der Potentialdifferenz diente ein Quadrantenelektrometer in Doppelschaltung. Dasselbe war aus einem Mascart-Carpentier'schen Instrumente für die großen (bis 400 Volt) Potentialdifferenzen unter Anbringung zahlreicher Änderungen umgebaut, und mit Bernsteinisolation versehen. Die bifilare Aufhängung an einem Platinfaden war durch veränderlichen Fadenabstand und veränderliche Belastung für verschiedene Empfindlichkeiten einzustellen. Die bei den großen Direktionskräften sehr wichtige Dämpfung war eine eigens konstruierte veränder-

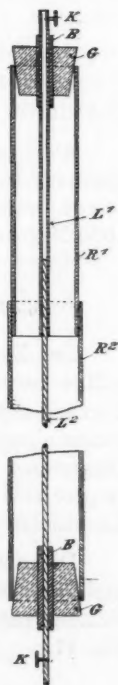


Fig. 10.

liche Luftdämpfung, welche in allen Fällen die Aperiodizität der Schwingung zu erreichen gestattete.

Trotz der Unempfindlichkeit des Elektrometers war ein sorgfältiger elektrostatischer Schutz unvermeidlich, hauptsächlich wegen der bei hoher Spannung an den Leitungsdrähten auftretenden Büschelentladungen. Das Elektrometer, isoliert aufgestellt, mußte, da das Gehäuse auf dem Potentiale einer Sonde sich befand, ebenfalls in einen Erdschutz eingebaut werden.

Das Galvanometer war ein ebenfalls sorgfältig isoliert aufgestelltes Spiegelinstrument von Keyser & Schmidt (Empfindlichkeit 10^{-8} Amp.). Ein Vorschalt- und ein Nebenschlußwiderstand gestatteten die Messung in verschiedenen Bereichen.

Die Ablesung war bei beiden Instrumenten eine objektive, so daß auf zwei übereinander angebrachten Skalen beide Koordinaten zugleich beobachtet werden konnten.

Als Stromquelle diente mit gleichem Resultate eine Hochspannungsbatterie und eine Gleichstrommaschine. Die Widerstände waren metallisch bis 11 Megohm, von da an bis 1000 Megohm Amylalkohol-Jodkadmiumwiderstände.

§ 5. Darstellungsweise der Diagramme; Tabellen.

Der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Potentialgefälle ist in den folgenden Diagrammen und Tabellen unter Zugrundelegung der Stromstärke und des Quadrates des Potentialgefälles mitgeteilt. Und zwar sind die Ordinaten der Diagramme die Stromstärken, deren absoluter Wert in Milliampère sich ergibt, falls man die jeweilige Ordinate mit dem Koeffizienten 0,0572 multipliziert.

Die absoluten Werte der Abszissen ergeben sich aus der nachfolgenden Tabelle, in welcher zugleich die Elektrometereichnung mitgeteilt ist; diese entspricht dem Diagramme der Fig. 11.

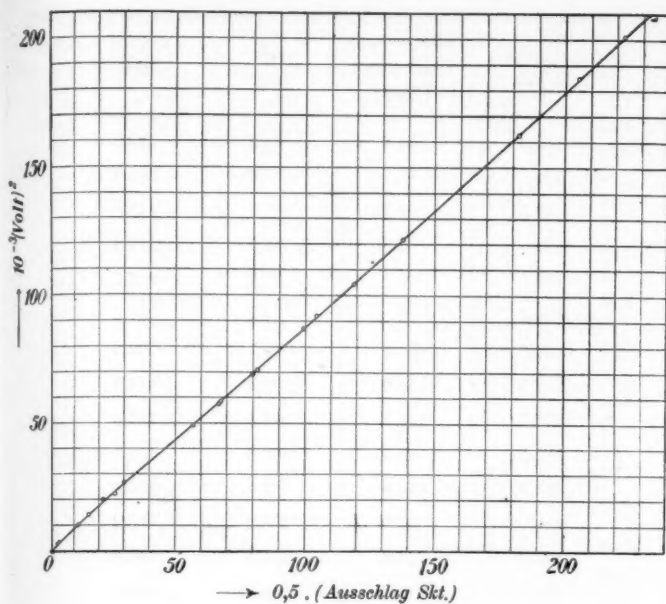


Fig. 11.

Aus Schlag in Skt.	Abzisse des Diagrammes (Fig. 11)	$\frac{(\text{Volt})^2}{1000}$	Volt
0	0	0	0
23,2	11,6	10,0	100,2
5,5	2,7	2,7	52,0
7,5	3,7	3,8	62,3
32,0	16	14,6	121,0
45,5	22,7	19,9	141
53,0	26,5	22,6	150,4
60,5	30,2	26,7	160,4
114,3	57,1	49,5	222,5
135,5	67,7	59,0	263,0

Ausschlag in Skt.	Abzisse der Diagramme (Fig. 11)	$\frac{(\text{Volt})^2}{1000}$	Volt
158,8	79,4	69,2	263,0
199,3	99,7	87,0	295,0
139,5	69,7	60,5	246,0
134	67	75,6	240,0
160,0	80	69,2	263,1
182,0	91	79,2	281,3
209,0	104,5	92,1	303,5
237,5	119,0	104,3	322,9
303,0	151,5	134,3	366,5
365,5	182,7	162,6	403,1
388,0	194,0	173,4	416,3
410,0	205,0	185,2	430,2
446,0	223,0	201,4	448,9
476,5	238,0	214,8	463,5
547	273,5	248,5	498,5

Die Tabelle gilt für alle Kurven mit Ausnahme derjenigen, welche in den drei Diagrammen I, II, III dargestellt sind; diese sind mit wesentlich größerer Empfindlichkeit des Elektrometers aufgenommen, und haben ein mehr qualitatives Interesse.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate der Beobachtungen wiedergegeben, welche in den Diagrammen 1—21 ihre graphische Darstellung finden. Über die Diagramme ist zu bemerken, daß, um einen Vergleich zu erleichtern, die erste Kurve links auf das richtige Koordinatensystem bezogen ist, während eine jede folgende Kurve auf ein Koordinatensystem zu beziehen ist, dessen Ordinatenachse um 10 Skt. gegen diejenige der vorausgehenden Kurve verschoben ist, und zwar nach rechts. Schließlich mußte aus praktischen Gründen die Reproduktion der Kurven im Verhältnis 2:5 verkleinert erfolgen.

Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.
21./X.	112,5	150,7	22./X.	10,0	2,7
Diagr.	106,0	142,2		116,5	143,5
1	95,7	130,0		138,8	167,5
	82,0	113,0		75,2	100,7
	64,8	92,5		51,5	74,5
	53,7	78,0		46,6	67,5
	42,5	62,5		35,3	52,2
	32,6	49,0		23,4	34,5
	24,5	36,5		17,5	24,5
	17,5	24,7		14,0	17,7
	14,5	17,0		11,6	11,5
	11,3	11,2		8,4	0,2
	82,0	111,0		13,0	12,7
	66,5	92,5		140,1	167,5
	33,3	48,0		117,6	143,5
	10,5	6,5		52,4	73,7
	33,3	49,0		17,5	24,5
	17,5	24,7		9,8	2,5
	11,0	8,0		52,2	73,5
	10,0	4,5		17,5	23,5
	17,5	24,5		13,9	17,7
	69,9	96,5		11,3	11,5
	53,6	77,0		9,8	5,2
	13,1	11,5?		17,5	23,5
	66,8	92,5		9,8	5,2
	20,0	28,5		11,0	1,5
	16,5	22,5		7,0	0,2
	14,0	14,5		10,5	7,0
	33,0	48,5		10,9	1,5
	99,0	131,5		52,0	74,0
22./X.	59,0	82,2		100,4	125,2
Diagr.	87,4	113,5		118,0	143,5
2	120,2	148,0		140,6	167,5
	77,5	102,2		159,0	187,5
	58,5	82,2		52,6	73,7
	46,6	77,5	23./X.	53,0	74,2
	37,0	54,2	Diagr.	143,5	167,7
	29,5	44,5	3	119,5	143,7
	23,3	34,5		64,8	74,5
	12,5	13,2		51,0	61,7
	10,0	5,2		41,6	51,0

Datum	10^{-3} (Volt) ^s	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	Datum	10^{-3} (Volt) ^s	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.
23./X.	28,8	36,7	24./X.	12,3	13,0
	18,4	24,0		16,0	10,2
	11,7	13,2		58,3	74,0
	8,8	5,7		143,0	164,0
	8,0	4,2		Ni	
	64,7	74,7			
	123,0	127,2	9./XI.	13,5	23,5
	153,1	154,2	Diagr.	20,0	36,0
	177,0	174,2	5	27,1	49,0
	158,2	160,0		35,0	62,0
	105,0	113,5		42,5	74,0
	75,2	87,5		51,7	85,7
	62,8	74,5		61,0	99,2
	41,2	51,0		70,0	112,5
	17,0	23,7		80,2	123,5
	9,7	10,0		91,0	136,5
	11,7	3,7		101,0	146,5
	11,7	1,7		109,2	161,0
	64,7	11,7		129,2	184,2
	27,0	74,7		90,5	136,0
	177,0	174,5		70,5	111,0
	106,0	114,2		51,5	86,0
				35,2	61,0
24./X.	123,4	143,5		20,9	36,0
Diagr.	110,2	127,0		15,0	23,5
4	95,0	112,5		11,0	11,0
	80,7	99,7		9,8	4,7
	67,3	86,2		8,5	3,5
	54,5	74,0		8,0	1,0
	45,7	61,5		7,5	0,2
	29,0	48,5		9,8	5,5
	23,4	36,5		Pt	
	15,0	24,0			
	12,2	17,7	Diagr.	13,5	23,5
	3,1	11,7	6	19,0	36,0
	13,0	11,0		27,0	38,7
	8,5	10,5		34,5	61,5
	0,5	10,2		44,5	73,5
	34,0	48,5		52,5	86,5
	14,9	23,5		60,5	98,5
	10,8	13,0		61,5	99,2
	14,9	11,2		71,5	111,0

Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.
Pt			Al englisch		
9./XI.	82,0	123,5	9./XI.	9,0	1,0
	103,5	148,5		12,0	7,0
	114,8	162,2	Au		
	120,5	174,0	Diagr.	17,5	23,0
	128,4	184,2	8	19,6	36,0
	13,5	23,2		30,0	48,0
	10,5	11,0		36,1	61,0
	10,0	3,5		44,0	73,7
	8,9	1,0		52,0	86,0
	8,9	0,5		61,5	98,5
	9,8	5,5		70,5	111,0
	15,7	23,5		80,0	123,5
	20,0	48,5		91,5	133,5
	45,3	73,5		102,5	148,5
	62,5	98,5		113,0	161,0
	82,0	123,5		123,0	173,5
Al englisch				22,1	36,0
Diagr.	14,0	23,5		35,5	61,0
7	21,3	36,0		17,0	23,5
	27,7	48,5		15,8	11,0
	35,3	61,0		13,9	7,2
	43,5	73,5		13,0	4,7
	51,5	86,0		11,0	1,5
	59,5	98,5		17,0	23,5
	68,5	111,0	Al englisch		
	79,8	123,5	10./XI.	9,8	11,0
	91,0	136,0	Diagr.	13,5	23,5
	101,8	148,5	9	25,5	48,5
	112,5	161,0		42,0	73,5
	122,0	173,5		59,5	98,5
	128,9	184,2		80,4	123,5
	36,5	61,0		102,5	148,5
	56,5	73,5		130,5	148,2
	51,5	86,0		42,0	73,5
	28,0	48,5		25,5	48,5
	16,3	23,5	Al deutsch		
	22,0	36,0	Diagr.	80,3	123,5
	13,5	11,0	10 ³	102,0	148,5
	11,5	6,5		59,5	98,5
	9,8	1,5			

Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.
Al deutsch			Pt in flüssiger Luft		
10./XI.	42,5	73,5	11./XI.	185,2	184,2
	13,0	23,5	Diagr.	12,0	23,5
	25,5	48,5	11	25,0	48,5
	11,0	11,0		42,5	73,5
	8,9	6,0		59,5	98,5
	7,5	4,0		80,5	123,5
	131,5	184,2		103,4	148,5
	8,5	3,0		125,7	173,5
Al englisch in flüssiger Luft				12,0	23,5
11./XI.	32,9	57,7		8,0	11,0
Diagr.	81,0	123,5		4,5	2,7
10	62,5	98,5		17,5	36,0
	72,4	111,0		26,0	48,5
	82,8	123,5		34,0	61,0
	94,0	136,0		41,0	73,5
	117,9	161,0		50,4	86,0
	126,0	173,5		60,1	98,5
	136,7	184,2		12,1	23,5
	94,0	136,0		26,0	48,5
	72,4	111,0	Ni in flüssiger Luft		
	52,7	86,0	Diagr.	135,1	184,2
	44,0	73,5	12	126,0	174,0
	35,6	61,0		118,0	161,0
	28,0	48,5		106,0	148,5
	19,5	36,0		82,5	123,5
	13,5	23,5		61,5	98,5
	9,8	11,0		43,5	73,5
	8,5	6,7		28,0	48,5
	2,5	0,2		12,1	23,5
	2,0	0,0		9,0	11,0
	34,0	61,0		6,5	4,7
	60,0	98,5		5,0	1,5
	70,0	111,0	Al deutsch in flüssiger Luft		
	103,8	148,5	Diagr.	135,0	184,0
	116,0	161,0	13	25,9	48,5
	126,4	173,5		11,5	23,5
	19,7	36,0		9,0	11,0
	37,6	184,0		6,5	6,0
	5,6	2,5		61,0	98,5
				103,5	148,0

Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.	Datum	10^{-3} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-3}$ Amp.
Au in flüssiger Luft					
11./XI.	135,0	184,2		35,5	65,0
Diagr.	105,5	151,0		31,0	57,5
14	61,0	98,5		26,8	50,0
	43,0	73,5		22,5	42,0
	27,0	48,5		18,5	35,0
	13,0	23,5		14,5	27,5
	9,5	11,0		11,0	20,0
	8,0	6,0		8,0	12,5
	5,5	1,0		5,5	7,0
				5,0	2,5
Al deutsch				79,0	122,5
17./XI.	66,5	122,5		02,0	147,5
Diagr.	62,0	115,0		124,0	172,5
15	57,5	107,5		132,9	183,2
	53,2	100,0	20./XI.	31,0	80,0
	45,3	85,0	Diagr.	34,0	87,5
	39,6	77,5	17	36,5	95,0
	35,3	70,0		35,2	95,0
	31,0	62,5		27,0	73,2
	26,8	55,0		22,0	57,5
	20,0	42,5		16,7	42,5
	16,6	35,0		9,0	27,5
	12,5	27,5		4,5	12,5
	9,5	20,0		3,6	2,5
	5,5	12,5		5,4	12,5
	5,0	5,0	In flüssiger Luft		
	4,5	1,2	Diagr.	40,0	73,2
	4,0	0,0	18	43,0	77,5
	67,0	122,5		35,4	65,0
	57,5	107,5		26,9	50,0
	65,0	122,0		23,0	42,5
	69,0	180,0		19,2	35,0
In flüssiger Luft				13,5	22,5
17./XI.	79,0	122,5		9,5	12,5
Diagr.	66,5	107,5		43,0	77,5
16	60,5	100,0		76,5	122,5
	57,0	95,0		128,0	183,2
	45,7	80,0		26,5	50,0
	42,5	75,0		44,5	77,5
	37,5	67,5		78,0	122,5
				128,0	183,0

Datum	10^{-2} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-2}$ Amp.	Datum	10^{-2} (Volt) ²	$0,0572 \cdot 10^{-2}$ Amp.
6./XII.	126,0	145,0		183,5	196,0
Diagr.	116,0	132,5		134,0	148,5
19	103,0	120,0		79,9	96,0
	90,5	107,5		36,5	46,0
	76,0	95,0		14,0	1,0
	64,0	82,5	Adsorptionsgefäß in fester Luft		
	53,0	70,0		104,0	121,0
	43,0	57,5		77,5	96,0
	34,0	45,0		55,0	71,0
	24,5	32,5		34,5	46,0
	16,5	20,0		17,5	21,0
	12,0	5,5		13,5	8,5
	10,5	0,0		10,5	0,5
	17,0	20,0		26,0	33,5
	33,5	45,0		65,6	83,5
	53,0	70,0		91,0	108,5
	76,0	95,0		113,0	133,5
	102,0	120,0		145,8	158,5
	152,5	170,0		Schwankend	196,0
	173,5	195,0		78,5	96,0
Entladungsröhr in flüssiger Luft				162	175,5
7./XII.	11,3	1,7	9./XII.	19,5	33,5
Diagr.	13,0	3,5	Diagr.	33,0	46,0
20	17,5	21,0	21	119,0	146,0
	25,5	33,5		97,0	121,0
	34,5	46,0		133,0	96,0
	44,0	58,5		53,5	71,0
	53,5	71,0		33,0	46,0
	65,5	83,5		16,0	21,0
	77,5	96,0		11,5	1,0
	91,0	108,5		119,5	146,0
	103,8	121,0		159,5	171,0
	119,0	133,5		150,0	196,0
	131,5	146,0			
	146,0	158,0			
	151,5	171,0			
	169,5	183,5			

IV. Beobachtungsergebnisse.

§ 1. Zusammenhang zwischen dem Potentialgefälle, der Stromdichte und dem Vakuum.

Schon während der ersten Sondenmessungen, als die Methoden des Evakuierens noch nicht in dem Maße entwickelt waren, wie es im Laufe der Zeit geschehen ist, ist neben mehreren unregelmäßig und immer wieder in einer anderen Form auftretenden Erscheinungen und Gesetzmäßigkeiten eine durchgreifende und immer reproduzierbare festgestellt worden. Es ergab sich, daß, wenn das Entladungsgefäß nur einigermaßen richtig vorbehandelt, und das im Einleitungskapitel als Gebiet der Untersuchung gekennzeichnete Vakuum erreicht war, zwischen der Stromstärke J und dem Potentialgefälle v der Zusammenhang bestand:

$$(1) \quad J = \alpha v^2 + \beta,$$

wo α und β Konstante sind, die im allgemeinen Teile näher interpretiert werden sollen.¹⁾

Voraussetzung für das Bestehen dieses Gesetzes war, außer der einen, daß die geeignete Gasverdünnung erreicht war, auch noch die andere ebenfalls bereits erwähnte, daß J einen nicht allzu kleinen Wert — bei 10 mm Röhrendurchmesser etwa 1 Milliamp. — hatte. Für die darüber gelegenen Stromstärken galt dann das Gesetz so lange, bis die infolge der Belastung der Röhre erhitzten Glaswände eine merkliche Partialdichte zu der im Rohre herrschenden Gesamtdichte beisteuerten. Denn, da eine Gasdichtesteigerung eine Verringerung des Potentialgefälles für die gleiche Stromstärke bedingte, mußte die Erwärmung der Gefäßwände in diesem Gedankengange dadurch kenntlich werden, daß das α der Gleichung (1) wuchs und man kam so in eine Funktion hinein, die einem anderen Vakuum angehörte. — Von dem β , welches bei den damals behandelten Gasdichten sehr klein war, konnte in erster Linie abgesehen werden.

All das über das quadratische Gesetz Ausgesagte bleibt auch für das vermittelt der später hergestellten Hilfsmittel

1) Vgl. die beiden letzten der p. 673, Fußnote 2, angeführten Publikationen.

erreichbare höhere Vakuum bestehen. Auch hier bringt eine jede Verringerung der Gasdichte (bis zu dem weiter unten behandelten Grenzwerte) eine Verringerung des α hervor. Außerdem sind noch drei weitere gemeinsame Eigentümlichkeiten der Charakteristik vorhanden, die überall immer wieder auftreten. Deshalb seien dieselben, um unnützen Wiederholungen in der Zukunft aus dem Wege zu gehen, an dieser Stelle zusammengefaßt:

a) Falls man sich bei der Variation der Gasdichte in dem Vakuum der Untersuchungen bewegt, so ist die minimale Stromdichte, von der an eine Annäherung an die Gleichung

$$(1) \quad J = \alpha v^2 + \beta$$

erfolgt, bei größerer Gasdichte stets kleiner als bei weiter vorgeschrittenem Vakuum.

b) Das β wächst bei abnehmender Gasdichte, bleibt aber im großen ganzen klein gegen den Entladungsstrom, bei welchem meistens beobachtet wird.

c) Bei den kleinsten zur Beobachtung gelangenden Stromstärken — Stromdichten, welche weit unter der in a) genannten liegen — sind die Werte des Potentialgefälles und der Stromstärke durch kein scharf ausgeprägtes Gesetz miteinander verknüpft, was man aus den in den Diagrammen zerstreut liegenden Punkten dieses Gebietes entnimmt.

Im Gegensatz zu der streng befolgten Gesetzmäßigkeit der Gleichung (1) standen andere während der Anfangsperiode der Untersuchung bei geringeren Stromstärken auftretenden Teile der Kurven. Diese Teile waren, wie bereits aus c) geschlossen werden kann, nicht nur bei verschiedenen Apparaten recht verschieden. Selbst bei ein und derselben Röhre zeigten sie ein schwankendes Verhalten; des öfteren war nicht einmal eine richtig zusammenhängende Reihenfolge von Beobachtungen erreichbar. Die Kurve des Diagramms I stellt eine an einer Röhre aus Thüringer Glas (mit Bleieinschmelzglas gearbeitet) aufgenommene Charakteristik dar. Auf der Abszissenachse sind die Quadrate des Potentialgefälles, auf der Ordinatenachse die Stromstärken aufgetragen. Der Röhrendurchmesser betrug im Lichten 14 mm. Man sieht, daß dem streng gesetzmäßigen oberen Teile der Kurve ein für die *wachsenden* Stromstärken

and
welc
Geis
nimt

150

0,05 · 10⁻³ Amp.

100

50

Stro
Pote
auße
welc
weis
ist d
relat
Teil

anders als für die *abnehmenden* liegender Teil vorausgeht, in welchem, ähnlich wie bei der gewöhnlichen Entladung der Geissleröhren, das Gefälle mit zunehmender Stromstärke abnimmt. Außerdem ist ein Teil bei den kleinsten beobachteten

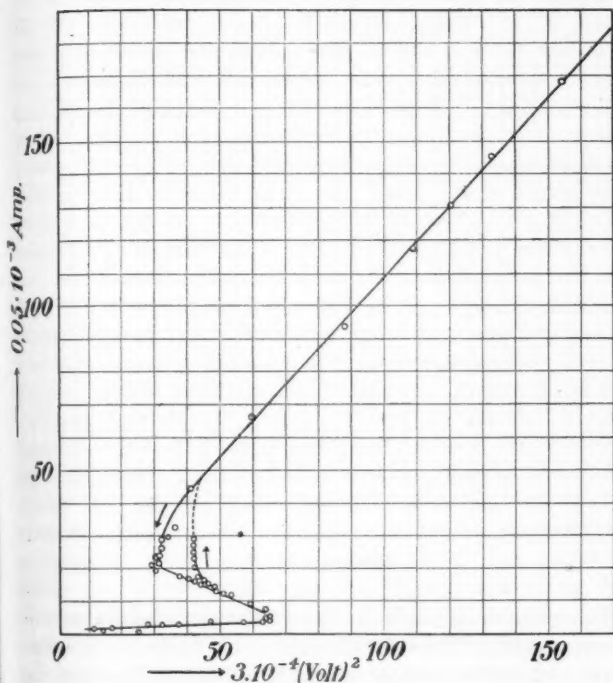


Diagramm I.

Stromstärken vorhanden, der ein relativ sehr bedeutendes Potentialgefälle aufweist. Ferner stellt das Diagramm II außer einem dem letzteren analogen Teile einen Ast dar, welcher bei der Röhre des ersten Diagramms nur andeutungsweise vorhanden war, hier aber gut ausgeprägt ist. Und zwar ist dieses ein Kurvenstück, auf dem bei geringem konstanten v^2 relativ große Stromstärken bestehen. Hingegen ist hier der Teil, welcher bei zunehmendem Strom eine Abnahme des

Potentiales aufweist, zu unstabil, um aufgenommen zu werden. Das Diagramm II entspricht einem Rohr aus Jenaer Normalglas.

$9 \cdot 10^{-8}$ Amp. \leftarrow

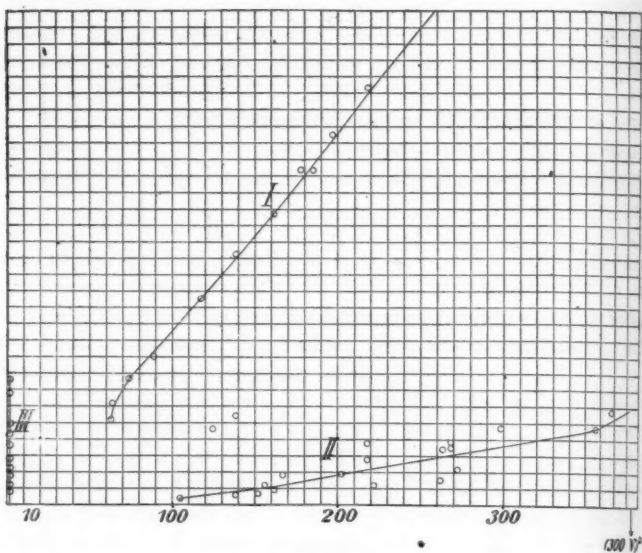


Diagramm II.

Es ergab sich im Laufe der Untersuchungen, daß die unregelmäßigeren unteren Teile der Charakteristik desto beschränkter wurden und desto weniger markant auftraten, je freier die Gefäßwände von adsorbierten Gasresten gehalten wurden. Sie können deshalb vielleicht als Übergangszustände zwischen der Entladung bei höherem Drucke und dem hier behandelten Gebiete aufgefaßt werden. Da aber durch die Unkonstanz ihrer Erscheinung das Absondern des Wesentlichen vom Unwesentlichen (Isolationsfehlern, Gaseigenheiten, Rückstandsbildungen, Unsauberkeit aller Art) große Schwierigkeiten bereitete, wurde der Plan gefaßt, zunächst eine Arbeitsweise durchzubilden, die das Vakuum nach Möglichkeit verbesserte, in der Hoffnung, eine durchweg gleichartige Gesetzmäßigkeit

der Charakteristik durch Herstellung gut definierter Bedingungen zu erzielen, und vielleicht erst auf Grund von so gewonnenen Einsichten die älteren Beobachtungen kritisch zu wiederholen.

Zu diesem Zwecke wurden von nun an die Röhren, um die Unsauberkeiten des Bleieinschmelzglases zu vermeiden, stets aus Jenaer Normalglas angefertigt. Ferner verließ ich den ursprünglichen Röhrentyp, dessen Hauptausdehnung in einer Horizontalebene lag, und stellte eine Form her, die ich im Teile III als den vertikalen Typ bezeichnet habe. Infolgedessen ist *vor allem* eine wesentlich *höhere Erhitzung* der Röhren während des Evakuierens in den angegebenen Thermostaten ermöglicht worden. Außerdem ist es leicht, ein derartiges Rohr auch auf eine *tiefe Temperatur* abzukühlen, vorausgesetzt, daß die Röhre entsprechend sorgfältig gearbeitet ist; man braucht sie zu diesem Zweck nur in ein doppelwandiges, mit einem Gemisch von Kohlensäure und Äther, mit flüssiger Luft oder ähnlichem gefülltes Gefäß hineinzubringen. Das Abkühlen der Röhrenwände ist deshalb von großer Wichtigkeit, weil man dadurch und unter Zuhilfenahme der Entladung ein Kriterium gewinnt, auf Grund dessen es sich beurteilen läßt, ein wie großer Teil der Gasdichte im Gefäß dem Dampfdrucke der an den Röhrenwänden haftenden, am Glas adsorbierten oder in demselben aufgelösten Beimengungen (Kohlenwasserstoffen usw.) entstammt; denn durch das starke Abkühlen der Röhrenwand wird der Dampfdruck dieser Stoffe bis ins Unmerkliche verringert. Ist folglich ihre Dampfdichte vergleichbar mit dem Gasdrucke in der Röhre, also mit der Summe der Gasdichten, welche im stationären Zustand von den einzelnen Gasen über der Holzkohle bei der Temperatur der flüssigen Luft geliefert werden, so muß das Potentialgefälle der Entladung für die gleiche Stromstärke größer werden, falls man das Rohr kühlt, als in dem gewöhnlichen Zustand, in welchem das Rohr frei in der Luft hängt und von dem Entladungsstrome unter Umständen stark erhitzt wird.

In der Tat ergab es sich bei dem ersten Versuche, daß die Abkühlung des Rohres auf etwa -185° beinahe eine Verdoppelung der Spannung zwischen den Sonden zur Folge hatte.

Daraufhin wurde der Thermostat verbessert und auf die angegebene Form gebracht. Es folgte die im Diagramm 1 voll ausgezogene Kurve, falls das Gefäß frei hing und durch die Entladung erhitzt wurde. Nach längerem Betriebe ging diese Kurve in die gestrichelte über, welche höheren Spannungen für die gleiche Stromstärke, einem höheren Vakuum entsprechend, aufweist. Am nächsten Tage wurde die Kurve des Diagramms 2 beobachtet, die einem weiter verbesserten,

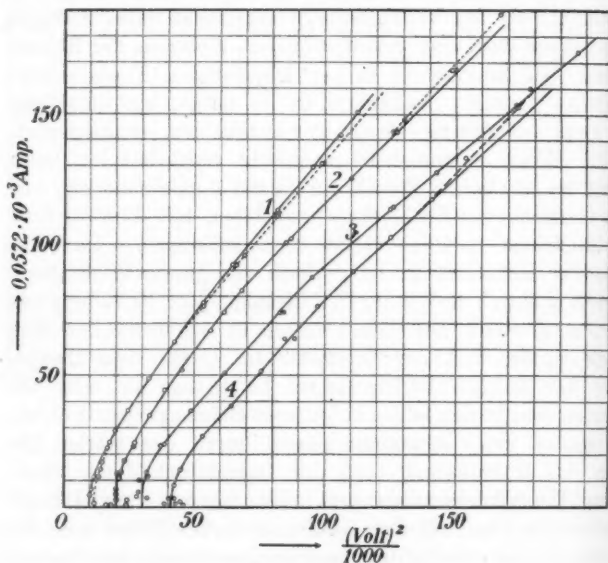


Diagramm 1-4.

durch lange Adsorption und anhaltende Entladung bedingten Vakuum entspricht. Der gestrichelte Linienzug bedeutet hier einen Teil, in welchem die hohe Belastung eine derartige Erhitzung auf etwa 250° bedingt, daß die Steigerung der Dampfdichte über den Glaswänden merklich wird.

Diagramm 3 zeigt die bei in flüssige Luft eingetauchtem Entladungsgefäß beobachtete Kurve. Sie verläuft nicht nur bei den höheren Potentialgradienten — auch ist der für eine

hohe Stromstärke nach höherem Drucke zu abweichende gestrichelte Teil des Diagramms 2 in Wegfall gekommen. Die gestrichelte Kurve gibt den Verlauf der Charakteristik unmittelbar vor dem Eintauchen des Rohres in flüssige Luft an. Man sieht, daß die verbesserte Erhitzungsweise der Röhre dem vorher erwähnten Versuche gegenüber, in welchem eine Verdoppelung des Potentialgefälles bei der Kühlung eintrat, einen ganz bedeutenden Fortschritt herbeigeführt hat.

Diagramm 4 gibt eine am nächsten Tage ohne Kühlung aufgenommene Charakteristik. Der gestrichelte Teil hat dieselbe Bedeutung wie derjenige in dem Diagramm 2, der punktierte gibt zum Vergleiche den Tags zuvor ohne Kühlung beobachteten Verlauf an; man sieht eine fortschreitende Verbesserung des Vakuums.

Wenn man die einzelnen Diagramme miteinander vergleicht, so wird man in denselben, wenn auch nicht so prägnant, wie es in den später folgenden stattfindet, Beispiele für die unter a), b) und c) ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten finden.

Bezüglich des Satzes a) sei nebenbei bemerkt, daß allem Anscheine nach gerade in dem unteren Teile der Kurven nicht nur der Druck, sondern auch die chemische Beschaffenheit der Gasfüllung sich bemerkbar macht, daß also der Satz a) nur im großen ganzen, wenn auch meistens sehr typisch, gilt.

Nachdem die den Diagrammen 1—4 zugrunde liegende Röhre erwiesen hatte, daß man sich sehr weitgehend von der Gasdichte über der Gefäßwand unabhängig machen kann, versuchte ich die Entgasungsmethoden möglichst noch weiter zu treiben. Da in dem ganzen unteren Teile des Rohres nur noch die Anode allein auf keiner bestimmten Temperatur gehalten werden konnte, selbst wenn das ganze Entladungsrohr in flüssiger Luft tauchte, wurde zunächst die in Fig. 7, p. 687, angegebene Platintopf-anode eingeführt, die mit ihrer ganzen äußeren Oberfläche mit der Kühlflüssigkeit in Berührung bleibt. Ferner wurde die Technik des Auspumpens verbessert, indem die p. 682 beschriebene Anordnung der Pumpen und der beiden Adsorptionsgefäße getroffen wurde. Wurde nun nach dem Prinzip gearbeitet, daß möglichst bereits in den ersten Stadien des Auspumpens schon ununterbrochen ein Teil der Rohrleitung auf einer sehr viel tieferen Temperatur gehalten wurde, als die Entladungs-

röhre, so erreichte man einen Reinheitsgrad der Glaswand, bei dem der Teil $J = \alpha v^2 + \beta$ unverändert blieb, selbst bei einem großen Temperaturwechsel. Und zwar war es möglich, das erwähnte Prinzip der Herstellung des Vakuums selbst auf die Dauer von wochenlang fortgesetzten Untersuchungen beizubehalten, da die inzwischen errichtete Verflüssigungsanlage des Instituts große Mengen flüssiger Luft sehr zuverlässig lieferte. Es wurde auf diesem Wege erreicht, daß bei einem Temperaturwechsel von einer Temperatur von etwa $+200^\circ$, die einer belasteten Röhre ohne Kühlung an der Glaswand entsprach, bis zu etwa -185° im Bade flüssiger Luft die Koeffizienten der Gleichung (1) keine merkliche Änderung erfuhren. Die ersten Versuche, die mit derartig weitgehend entgasten Röhren angestellt wurden, sollen übergangen werden, da in dem späteren Material (Diagramm 5—14) genügende Beweise für die obige Behauptung mitgeteilt werden, und es soll gleich zu der Beschreibung einer weiteren Serie parallel laufender Versuche geschritten werden.

Die scheinbare Konstanz des Vakuums bei dem oben erwähnten, so beträchtlichen Temperaturintervall an den Glaswänden schien viel Sonderbares zu enthalten. Denn es ist im höchsten Grade unwahrscheinlich, daß eine Glasoberfläche dauernd so weit gasfrei erhalten werden kann, daß keine Änderung der Dampfdichte bei so großen Temperaturdifferenzen über derselben vorkommt. Zumal, da während vieler Wochen keine merkliche Nachdiffusion aus den tieferen Schichten des Glases an die Oberfläche eintritt. Ich schloß also, daß möglicherweise eine andere Ursache eine Gasdichte abgeben könnte, der gegenüber die Partialdichte über der Glaswand verschwände. So kam ich auf den Gedanken, diese überwiegende Gasdichte würde vielleicht von der Entladung an den sich merklich erwärmenden Anoden erzeugt werden.

Um diese Frage experimentell zu prüfen, wurden an einem Glaskörper von der Form eines stark abgeflachten Rotationsellipsoids fünf Platintopfanden angeschmolzen (Fig. 11). Die mittlere erhielt keine Einlage, während die vier übrigen je einen genau hineinpassenden Topf aus 0,3 mm starkem Blech und zwar aus Nickel, Gold, deutschem Aluminium und englischem Aluminium erhielten. Die eingelegten Töpfe waren mit einem

umgelegten Rand versehen, um zu verhüten, daß Spuren der Entladung vom oberen Rand der Platintöpfe ausgehen. Die beiden Sorten Aluminium waren gewählt auf Grund der notorisch feststehenden Erfahrungen der Röntgenröhrentechnik, daß deutsches Aluminium einen größeren Gehalt an Natrium und folglich eine sehr viel stärkere Gasentwicklung (Wasserstoff¹⁾) unter der Einwirkung von Vakuumentladungen besitzt. Es ist gerade *diese* Eigenschaft, welche es geeigneter zur Verwendung in den Röntgenröhren macht, als das Metall englischer Herkunft.

Es war also alles danach eingerichtet, die Bedingungen an den Anoden recht verschieden zu gestalten; ich erwartete denn auch eine große Verschiedenheit des Verhaltens, die desto größer hätte sein müssen, weil die einzelnen Einlagetöpfe durchaus nicht — wie beabsichtigt war — in gleich gutem Wärmekontakt mit den Platinhüllen standen. So geriet z. B. die Goldanode schon bei mäßiger Belastung ins Glühen, wenn sie durch einen Stoß etwas verschoben wurde. Hingegen war die mittlere Platinanode ohne Einlage, hatte also sehr viel günstigere Bedingungen in bezug auf die Wärmeabgabe nach außen als die übrigen Elektroden. Bereits beim Entgasen durch die Entladung verhielt sich die Röhre in einer durchaus unvorhergesehenen Weise. Es wurde systematisch, um einen Vergleich zu ermöglichen, so verfahren, daß ein bestimmter Strom, etwa 11 Milliamp., so lange von einer jeden der Anoden aus durchgeschickt wurde, bis sich ein während längerer Zeit (15 Min.) unveränderlicher Grenzwert des Potentialgefälles einstellte. Nun trat aber gegen alle Erwartung hintereinander bei einer jeden Anode der nämliche Grenzwert ein wie bei den vorausgehend entgasten, wenn auch zur Erreichung desselben ver-

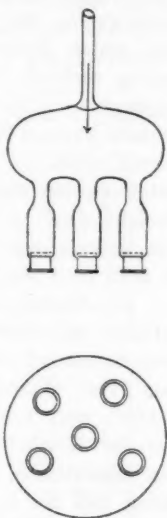


Fig. 11.

1) Vgl. auch R. v. Hirsch u. F. Soddy, Phil. Mag. 14. p. 779. 1907.

schiedene Zeiten benötigt wurden. So dauerte das Entgasen der Platin-, Aluminium- englischer Herkunft, Nickel- und Goldanoden je 40—100 Min., während die aus deutschem Aluminium angefertigte Anode über 3 Stunden bis zum Erreichen des Grenzwertes benötigte. Es ist von Interesse, daß, wenn nach dem ersten Entgasen die Röhre 24 Stunden lang ohne Entladung verblieb, bei einem neuen Einschalten nicht sofort der Grenzwert eintrat, sondern daß wieder eine, wenn auch bedeutend kürzere Zeit nötig war, um den Grenzwert zu erreichen. Dieses wiederholt sich an mehreren Tagen, die Entgasungszeiten werden aber immer kürzer, bis schließlich ein Stadium erreicht wird, in welchem keine Nachdiffusion der Gase aus den tieferen Schichten des Metalles an die Oberfläche (denn so muß man wohl dieses Verhalten auffassen) stattfindet.

Die Einstellung des nämlichen Grenzwertes des Potentialgefälles bei einer jeden der Anoden ist aus zwei Gründen bemerkenswert. *Erstens* ist das vom Metall abgegebene Gas zum Teil Wasserstoff. Nun wird Wasserstoff, da er bei -185° weit von seiner kritischen Temperatur entfernt ist, von der Holzkohle bekanntlich wenig adsorbiert — und bei den bedeutenden Mengen des entstehenden Gases ist es auffällig, daß die *zuerst* entgaste Anode zu demselben Endwerte des Gefälles führt, wie die *zuletzt* entgaste. Man muß unwillkürlich an die Möglichkeit denken, daß der Wasserstoff sich mit dem bis zu einem konstanten Partialdrucke im stationären Gleichgewicht über der Holzkohle befindlichen Sauerstoff (und ähnlich vielleicht auch Kohlenoxyd und Kohlewasserstoffe) zu einer sehr leicht kondensierbaren Verbindung (also zu Wasser und Kohlendioxyd etwa) unter dem Einfluß der Entladung verbindet. Diese Verbindungen würden dann merklich quantitativ von der Holzkohle aufgenommen werden.

Zweitens ist aber die Einstellung dieses nämlichen Grenzwertes unabhängig vom Anodenmaterial auch noch deshalb auffällig, weil, wenn man diesen Grenzwert als Maß des Vakuums annehmen würde, dieses besagen müßte: Das stationäre Gleichgewicht zwischen der Gasabgabe von der Anode einerseits und der Gasaufnahme durch die Holzkohle andererseits führt zu demselben Grenzwert unabhängig von der Beschaffen-

heit
bei
sonst
bem
wie
der
frei
Mög

0.0322 · 10⁻³ Amp
100
50
0

Dam
abge
die
beme
am
der
und
J =

heit der Elektroden. Beachtet man nun, wie aufdringlich sich bei der Konstruktion von Vakuumröhren (auch Röntgenröhren) sonst in der Gasabgabe die geringste Änderung des Materials bemerkbar macht, so wird man diesem letzten Schlusse irgendwie aus dem Wege zu gehen suchen, besonders angesichts der beträchtlichen, in meinen Versuchen an den Elektroden freiwerdenden Energiemengen. Man wird zunächst an die Möglichkeit denken, daß die von den Glaswänden abgegebene

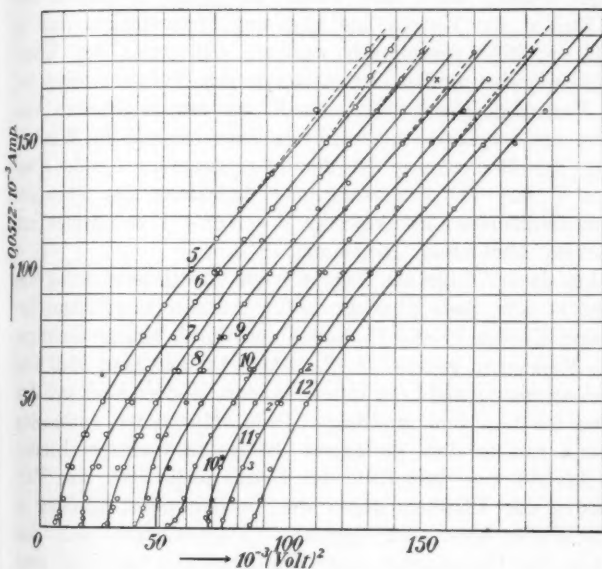


Diagramm 5—12.

Dampfdichte groß ist im Verhältnis zu der von den Anoden abgegebenen. Nun folgt aber an Hand der Diagramme, daß die Dampfdichte über den Glaswänden sich überhaupt nicht bemerkbar macht. Die Diagramme 5, 6, 7 und 8 zeigen die am 10. November 1909 aufgenommenen Charakteristiken unter der Benutzung bzw. der Nickel-, Platin-, Aluminium-englisch und Goldanode. Man sieht, daß diese Kurven in dem Teile $J = \alpha v^2 + \beta$ in bezug auf das α , also auf die Neigung der

Kurve genau übereinstimmen. Bei dem zuletzt aufgenommenen Diagramm 8 ist infolge des langen vorausgehenden Betriebes die Dampfdichte über der Glaswand so weitgehend reduziert, daß sie bei hoher Belastung immer noch denselben Konstanten α und β gehorcht, während die vorausgehenden Diagramme an derselben Stelle Abweichungen im Sinne des steigenden Druckes enthalten. Soweit die Unterschiede von β nicht in den weiter unten gekennzeichneten (p. 724) Fehlergrenzen liegen, kann aus ihnen und ganz besonders aus dem Verlauf der Kurven bei kleineren Stromstärken (vgl. a) und b), p. 700) geschlossen werden, daß trotz der Übereinstimmung bei großen Stromstärken das Vakuum nicht bei allen Versuchen gleich war, so z. B. bei dem englischen Aluminium am besten. — Am nächsten Tage erfolgte die Wiederholung der Bestimmung an der letztgenannten Anode (Diagramm 9) und die Entgasung und Aufnahme der ebenfalls übereinstimmenden Charakteristik $J = \alpha v^2 + \beta$ der Anode aus deutschem Aluminium (Diagramm 10*).

Am darauf folgenden Tage erfolgte die Untersuchung des Rohres in dem Bade flüssiger Luft. An den sorgfältiger bestimmten Kurven 10 und 11, sowie den durch wenige dicht gehäufte Messungen gegebenen 12, 13 und 14 sieht man, daß eine Übereinstimmung nicht nur untereinander, sondern auch mit den Kurven 5—9 in dem gradlinigen Teile vollkommen vorhanden ist, und nur in dem geringerer Stromstärke entsprechenden Teile könnte man mit Hilfe des Satzes a) (p. 700) eine Verbesserung des Vakuums gegen den Betrieb ohne Kühlung in einigen Fällen eben noch erkennen. Daraus ergibt sich, daß es nicht die Dampfdichte über der Glaswand war, die über die Gasabgabe der Anoden überwiegend die Messungen konstant machen konnte. Folglich bleibt, falls man die objektive Gleichheit des Verhaltens der Anoden in Frage stellen wollte, nur noch die letzte Möglichkeit, daß die in der Holzkohle adsorbierten Gase eine Summe von Gasdichten ergeben, welche groß ist im Vergleiche mit den Gasdichten anderen Ursprungs.

Es war demnach an der Zeit zu untersuchen, ob eine Erniedrigung der Temperatur der Holzkohle einen merklichen Anstieg des Potentialgefalles verursachen würde.

Da die Wasserstoffverflüssigungsanlage des Instituts zur-

zeit
dar
fest
gan
Rö
gew
p. 6

daß
Kül
Luft
eine
zue
Roh
wah
Ent

zeit erweitert und umgebaut wird, mußte ich mich vorläufig damit begnügen, das Adsorptionsgefäß auf die Temperatur der festen Luft zu bringen. Zu diesem Zwecke wurde, nach nicht ganz einwandfreien Versuchen mit der zuletzt beschriebenen Röhre, auf die ich weiter zurückkommen werde, ein Rohr der gewöhnlichen Form, jedoch mit einer Zylinderanode (vgl. Fig. 8, p. 687) versehen, besonders sorgfältig tagelang evakuiert, so,

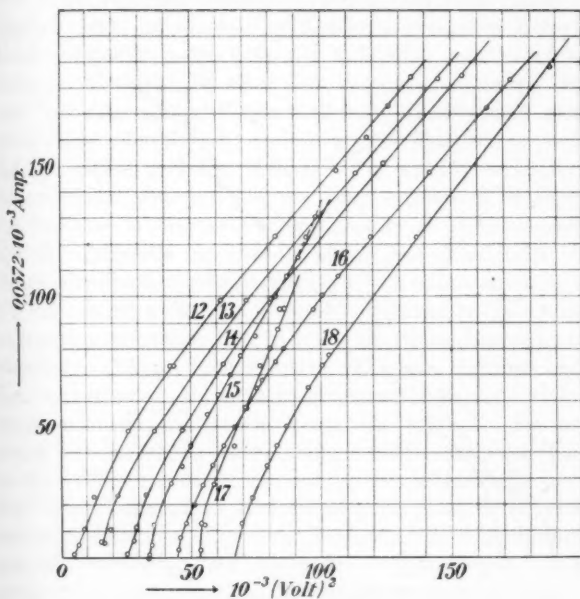


Diagramm 12—18.

daß seine Charakteristik im Bade flüssiger Luft von der ohne Kühlung nicht unterscheidbar war. Dann wurde die flüssige Luft um das Adsorptionsgefäß herum je vier Stunden lang in einem Vakuum von 10 mm Quecksilber verdampfen gelassen, zuerst bei freistehendem, dann bei durch flüssige Luft gekühltem Rohre. Das Ergebnis war, daß nicht die geringste Änderung wahrgenommen werden konnte, auch dann nicht, wenn das Entladungsrohr stundenlang bei starker Belastung während

des Versuches mit fester Luft betrieben wurde, so daß eine weitergehende Befreiung der Wände der Entladungsbahn von adsorbierten Gasen begünstigt war. Diagramm 19 zeigt die Charakteristik für das Adsorptionsgefäß in flüssiger Luft (-185° etwa), während das Entladungsrohr ungekühlt war. Diagramm 20 zeigt die Charakteristik desselben Rohres, durch Kreise bezeichnet, wo das Entladungsrohr sowohl wie das

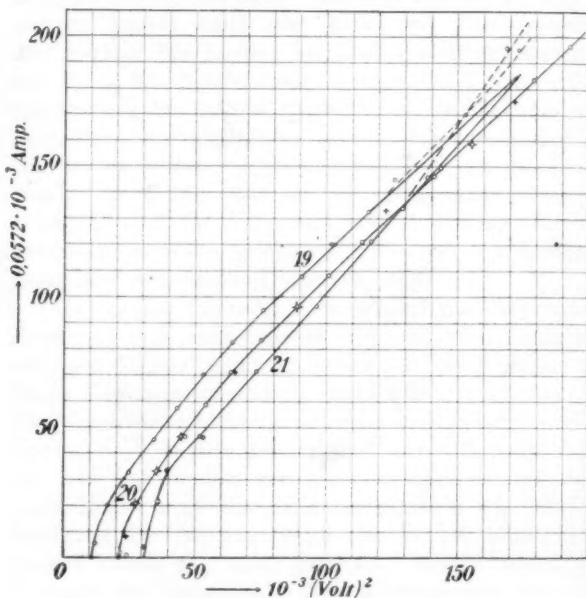


Diagramm 19–21.

Adsorptionsgefäß auf -185° gekühlt sind, und dann, durch Kreuze bezeichnet, die Kurve, während deren Verlauf das Adsorptionsgefäß in fester Luft (-220° etwa, da bei dem geringen Drucke von 8–10 mm auch der Sauerstoff nahe daran ist, fest zu werden) und das Entladungsrohr wieder in flüssiger Luft untergebracht waren. Die meisten Punkte fallen zusammen, da, wie auch sonst, beim Aufnehmen der Funktion auf bestimmte Stromstärken eingestellt und der Elektrometer-

ausschlag abgelesen wird. Ein Unterschied ist auch hier nicht ersichtlich. Da aber eine Erniedrigung der Temperatur um etwa 35° bei den tiefen Temperaturen unzweifelhaft¹⁾ die Adsorption an der Holzkohle sehr beträchtlich erhöhen muß, so folgt, daß auch die Erniedrigung der Gasdichte keinen Einfluß auf die Stromleitung bei dem untersuchten Stromstärkegebiet und hochgradigen Vakuum ausübt.

Denn aus den vorausgegangenen Versuchen hatte es sich ergeben, daß die anderen vorhandenen Ursachen keine merkliche Gasdichte mehr liefern. Außerdem werden auch diese früheren Versuche in einer aus bereits dargetanen Gründen viel befriedigenderen Weise dadurch erklärt, daß nicht die Gasdichte selber durch Änderung der Temperatur des Entladungsgefäßes und des Materials der Anode merklich unverändert bleibt, sondern daß *von einer bestimmten Maximaldichte des Gases ab in dem untersuchten Gebiete die Entladungsvorgänge von der Gasdichte unabhängig sind*. Der Maximaldichte des Gases entsprechen nun Grenzwerte der Konstanten α und β . Ob diese auch weiter bei beliebig zunehmender Gasverdünnung unbegrenzt unveränderlich bleiben, ob sie andererseits mit der chemischen Natur des Gasrestes variieren, darüber kann aus dem vorliegenden Material nicht geurteilt werden; einige Versuche scheinen die zweite Frage zu bejahen. Da es aber wegen der später zu entwickelnden Auffassung der Vorgänge (p. 734—735) zu erwarten ist, daß bei einem Gemische von Gasen sich immer diejenigen Grenzwerte der Konstanten einstellen werden, welche dem besonderen Bestandteile des Gemisches eigen sind, der für sich allein das größte α geben würde, so sind in dieser Richtung anzustellende Untersuchungen doppelt schwer auszuführen und nur auf Grund eines außerordentlich umfassenden Materiales sicher zu stellen. Denn es scheint wegen der p. 708 erwähnten wahrscheinlichen Oxydation aller Gasreste nicht leicht zu sein, in einem stationären Zustand ein beliebiges, aber streng definiertes Gas der Entladung auszusetzen.

1) J. W. McBain, Phil. Mag. 1909, p. 108, 980, findet, daß die Adsorption des Wasserstoffs einen sehr großen Temperaturkoeffizienten hat; schon die Temperaturunterschiede flüssiger Luft verschiedener Zusammensetzung bedingen starke Änderungen.

Möglicherweise könnte daran gedacht werden, daß die dauernde Gasabgabe von der Oxydkathode bedeutend genug ist, um all die anderen oben behandelten Faktoren in bezug auf die Beeinflussung der Gasdichte vollkommen in den Hintergrund zu drängen. Jedoch schon die alltägliche Erfahrung widerlegt diesen Gedanken, denn dann müßte der Grenzwert des Potentialgefälles offenbar notwendigerweise mit der Beschaffenheit dieser Kathode sehr stark variieren. Nun ist es aber erfahrungsgemäß nicht nur gänzlich gleichgültig, ob die Kathode sehr stark oder schwächer geglüht wird während der Entladung, vorausgesetzt natürlich, daß ihre Temperatur hoch genug ist, um ein richtiges Funktionieren zu gewährleisten; es ist auch auf das Potentialgefälle ohne Einfluß, ob es in den ersten Stunden des Betriebes oder nach etwa 60stündigem Glühen der Kathode gemessen wird. Und man wird doch mit Recht annehmen, daß die Gasabgabe in den Fällen, wo die Kathode kurz vor dem Schluß ihrer Lebensdauer steht, wesentlich anders geartet sein muß, als diejenige von einer relativ frischen Kathode. Denn zunächst ist zu beachten, daß an der Stelle, welche gegen Schluß der Lebensdauer der Oxydkathode „durchglüht“, also an der Stelle, an welcher sich der Riß ausbildet, eine sehr viel (vielleicht um mehrere 100%) höhere Temperatur herrscht, als an den übrigen Stellen, daß aber selbst diese über jedes Maß des Zulässigen gesteigerte Erhitzung zu keiner Änderung der Entladungscharakteristik führt.

Außerdem ist zu erwägen, daß bei einer konstanten Temperatur, also für das eventuelle Bestehen eines konstanten Partialdruckes über dem geglühten Blech das dynamische Gleichgewicht zwischen Gasabgabe und -aufnahme an der Holzkohle sich wesentlich verschieben müßte, je nachdem die Kathode frisch oder auch viele Stunden im Betriebe ist, da die Geschwindigkeit, mit welcher die Gase abgegeben werden, im Laufe der Zeit abnehmen müßte.

Ist schon die Gasabgabe von der nämlichen Kathode als im Laufe der Zeit wechselnd anzunehmen, so ist sie bei verschiedenen Kathoden, da doch ihre Beschaffenheit von Fall zu Fall sehr merklich wechselt, erst recht verschieden zu erwarten. Trotzdem kann, wenn in eine neue Röhre eine neue Kathode eingesetzt wird, an dem Grenzwerte des Potentialgefälles keine

Änderung beobachtet werden. Und selbst bei *verschiedenen Entladungsröhren* kommt man, wenn man auf Grund der weiter unten mitgeteilten Gesetze die Änderung der Charakteristik mit den geometrischen Verhältnissen der Röhre beachtet, *genau auf den gleichen Grenzwert*.¹⁾ So ist das Verhalten der Kathode eher ein sehr wichtiger Grund, die Existenz eines Maximalwertes der Gasdichte, von dem ab das Potentialgefälle unverändert bleibt, anzunehmen, als diese Annahme zu widerlegen.

Schließlich müßte aber, wenn man die Temperatur der Adsorptionssubstanz merklich erniedrigt, sich zwischen der Gasabgabe an der Kathode einerseits und der Gasaufnahme an der Holzkohle andererseits ein wesentlich anderes dynamisches Gleichgewicht der Gasdichte einstellen. Aber auch das ändert, wie man gesehen hat, an der Charakteristik gar nichts.

In einem loseren, wenn auch ebenfalls noch nahen Zusammenhange mit dem Gegenstand der obigen Auseinandersetzungen stehen die Diagramme 15, 16, 17, 18 sowie 21. Die ersten vier Diagramme sind an der Röhre mit fünf Anoden im Anschluß an die bereits beschriebenen Versuche aufgenommen, nachdem absichtlich gegen das p. 681 erwähnte Prinzip des Erhaltens des Vakuums: — Es soll immer ein Teil der Rohrleitung auf einer wesentlich tieferen Temperatur als die Entladungsröhre gehalten werden — verstoßen wurde. Und zwar ist das so getan worden, daß das Adsorptionsgefäß eine Zeitlang, etwa eine Stunde, auf Zimmertemperatur gebracht wurde. Man sieht aus der hernach aufgenommenen Kurve 15, wenn man sie mit den Diagrammen 5—14 vergleicht, daß sofort eine bedeutende Verunreinigung der Glaswände entstand. Kurve 16, bei der daraufhin das Entladungsrohr in flüssiger Luft gekühlt wurde, zeigt, daß diese Abkühlung die Einwirkung der Unsauberkeiten wieder gänzlich zurückdrängt und der Charakteristik genau wieder den Zusammenhang beilegt, der beim sauberen Rohre ohne Kühlung besteht. Zugleich bieten die Kurven 15 und 16 sehr deutliche Beispiele für die Sätze a) und b), p. 700.

1) So gehen die Grenzdigramme, welche an drei verschiedenen Röhren aufgenommen sind, in dem gradlinigen Teile glatt ineinander über, wenn man die unvermeidlichen Variationen des Sondenabstandes (28—32 mm) und des Durchmessers (9—10 mm) berücksichtigt.

Nebenbei sei bemerkt, daß bei Kurve 15 schon bei mäßiger Belastung, bei welcher die Glaswände sonst keine Spur des Natriumspektrums gaben, die Emission einer im einfachen Spektroskop mit den Natrium *D*-Linien koinzidierenden Linie in außerordentlich starker Intensität beobachtet wurde. Da eine derartige Spektralerscheinung bei sauberen Röhren, also bei geringerer Gasdichte, selbst unter viel stärkerer Belastung nicht entsteht, und sie wohl auf Bildung diffuser Kanalstrahlen zurückzuführen ist, kann diese Beobachtung möglicherweise einen prinzipiell wichtigen Einblick in die Bildungsfähigkeit von Kanalstrahlen gewähren. Da nämlich gleichzeitig mit dem Auftreten der *D*-Linie und der Verunreinigung der Röhre ein intensives Kohlewasserstoffspektrum auftritt, liegt es nahe, diese beiden Erscheinungen in einen ursächlichen Zusammenhang miteinander zu bringen. Dieses dürfte eine der von J. J. Thomson¹⁾ beobachteten verwandte Tatsache sein, daß im hohen Vakuum die Kanalstrahlen stets ein dem Wasserstoff entsprechende Verhältnis von Ladung zu Masse besitzen. Die Erklärung der Versuche von Thomson auf diesem Wege scheint um so näher zu liegen, als in seinen Versuchen überhaupt keine hinreichenden Maßregeln zur Beseitigung des Partialdruckes von Kohlewasserstoffen über den Glaswänden getroffen waren.

Diagramm 17 entstand durch eine weitere, länger andauernde Erwärmung der Wände des Adsorptionsgefäßes auf Zimmertemperatur. Man erkennt eine weitere Verschlechterung des Vakuums gegen die Kurve 14. Die Kurve 18 entspricht der hernach in flüssiger Luft gekühlten Röhre. Das Vakuum ist nunmehr so schlecht definiert, daß selbst diese starke Kühlung nicht mehr ganz auf den alten Grenzwert des Gefalles zurückführt. Gleichzeitig ist ein — wegen der Unsauberkeit und daher rührender merklichen Dampfdichte über den Glaswänden allerdings nicht beweiskräftiger, und deshalb nicht wiedergegebener — Vorversuch der Kühlung des Adsorptionsgefäßes durch feste Luft ausgeführt worden, der nicht merklich von der Kurve 18 abwich.

1) J. J. Thomson, *Phil. Mag.* 13. p. 561. 1907; 16. p. 657. 1908; 18. p. 821. 1909. — Vgl. auch eine mit meiner obigen verwandte Deutung der Thomsonschen Versuche durch W. Wien, *Phil. Mag.* p. 212. 1907.

Auch liefern 17 und 18 Beispiele für die Gesetze a) und b), p. 700. Diagramm 21 entsteht in der Röhre der Diagramme 19 und 20 durch einen ähnlichen Umstand wie 15 und 17 in der Röhre mit fünf Anoden; auch in dem Vergleiche von 21 mit 19 und 20 findet man Beispiele für die Sätze a) und b).

Um auch das Gesetz des unteren Teiles der Charakteristik aufzustellen, also des Teiles, welcher von $J = 0$ bis zum Gültigkeitsbereiche der Formel $J = \alpha v^3 + \beta$ sich erstreckt, mag die Kurve des Diagramms 20 wie folgt benutzt werden. Es werde eine Parallelverschiebung längs der Abszissenachse ausgeführt, so, daß die Kurve durch den Koordinatenursprung geht. Dies geschieht, wenn man v^3 ersetzt durch $(v^3 - 11)$. Nunmehr sollen die Logarithmen sowohl von $(v^3 - 11)$, als auch von J für die ganze Kurve aufgesucht werden. Subtrahiert man, einer bequemerem Darstellung wegen, in der folgenden Tabelle 0,70 von dem $\log J$, führt also $\log J - 0,70$ ein und multipliziert sowohl diese Größe wie auch $\log(v^3 - 11)$ mit 100, so ergibt sich das Folgende:

I	II	III	IV
1	5	0	0
2,5	10	40	30
4,5	15	65	47
6,8	20	88	60
9,5	25	98	70
12,6	30	110	78
17,2	35	124	84
19,7	40	129	90
23,7	45	137	95
26,8	50	143	100
34,8	60	154	108
42,9	70	163	114
51,9	80	171	120
62,0	90	179	125
72,0	100	186	130
92,5	120	197	138
114,0	140	206	145
135,0	160	213	150
156,0	180	219	155
176,5	200	225	160

Kolonne I enthält die Größe $10^{-3}(\text{Volt})^3 - 11$,

„ II „ „ „ $0,0572 \cdot 10^{-3} \text{ Amp.}$,

„ III „ „ „ $10^3 [\log_{10}(v^3 - 11)]$,

„ IV „ „ „ $10^3 [\log_{10}(0,0572 \cdot 10^{-3} \text{ Amp.}) - 0,70]$.

Diagramm 20a enthält die graphische Darstellung der Werte der Kolonnen III und IV. Die Punkte vom Koordinatenursprung bis zu dem mit einem Pfeile bezeichneten Knicke liegen unzweifelhaft auf einer Geraden, welche dem gekrümmten Teile des Diagramms 20 entspricht. Die Gleichung dieser Ge-

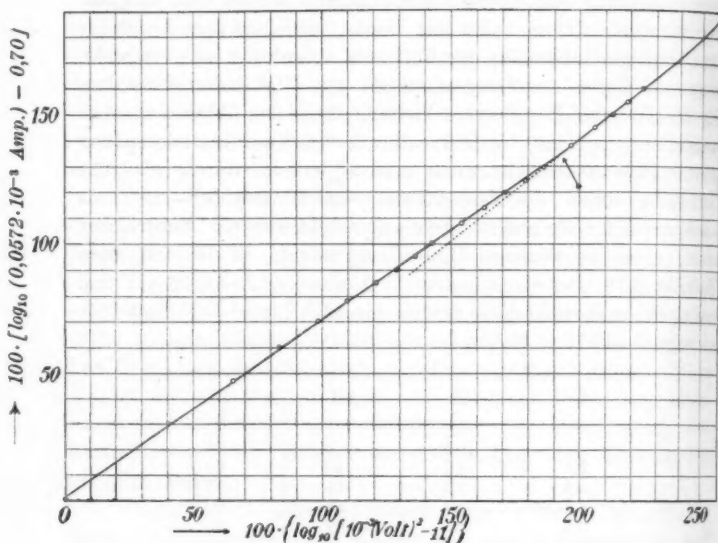


Diagramm 20a.

raden ist, falls man die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die Abszissenachse in erste Annäherung $= \frac{3}{4}$ annimmt:

$$\log J - 0,70 = \frac{3}{4} \log(v^2 - 11),$$

also ist

$$J = 10^{0,70} (v^2 - 11)^{3/4}.$$

Der Teil der Kurve oberhalb des mit Hilfe eines Pfeiles bezeichneten Knickes entspricht dem geraden Teile der Kurve des Diagramms 20, $J = \alpha v^2 + \beta$, und ist folglich ebenfalls eine Gerade. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man den Eindruck gewinnen, als ob dieser Teil durch zu wenige Punkte festgelegt worden wäre. In Wirklichkeit übertrifft die Genauigkeit

seiner Bestimmung bei weitem die in der Darstellungsweise des Diagramms 20a reproduzierbare Genauigkeit, da bereits die Kurve der Numeri der Koordinaten eine scharfe Gerade ist.

Der erwähnte Knick besitzt also unzweifelhaft eine reelle Bedeutung und zwar die, daß in seiner Umgebung der Exponent des Potentialgefälles in der Charakteristik um etwa 25 Proz. seines Anfangswertes zunimmt.

Genauer formuliert: *die Charakteristik besteht aus zwei Teilen. In dem ersten Teil wächst das Potentialgefälle wie $J^{1/2}$, in dem zweiten wie $J^{1/4}$. In beiden Teilen ist der Zusammenhang zwischen J und v einfach durch eine Potenserhebung hergestellt.*

An dieser Stelle ist noch eine Bemerkung am Platze über einige scheinbar nur durch wenige Punkte festgelegten Diagramme, sowie über die allgemeine Genauigkeit der Messungen. In der technischen Sachlage ist es begründet, daß man im allgemeinen möglichst schnell zu arbeiten bestrebt ist. Denn, falls geplant ist, an einem Apparat eine große Reihe zusammenhängend sein sollender Messungen auszuführen, wird man damit rechnen müssen, daß die Lebensdauer einer Röhre, besonders aber diejenige der Kathode, eine beschränkte ist. Und nicht unbedeutend fällt der Umstand in die Wagschale, daß ein jeder neue Apparat nicht nur Kosten, sondern auch viel Mühe und Zeitverlust beim Auspumpen und Fertigstellen für die Messung verursacht. Man wird also notgedrungen eine Arbeitsweise wählen müssen, die in erster Linie möglichst rasch zum Ziele führt. Als eine solche ergibt sich von selbst die Einstellung auf bestimmte Stromstärken und Beobachtung des hinzugehörenden Elektrometerauschlages. Es ist für die ohnehin durch die ganze Apparatur stark in Anspruch genommene Aufmerksamkeit des Beobachters eine Entlastung, auf immer dieselben wenigen und markierten Punkte häufig einzustellen, als viele kontinuierliche hintereinander liegende Beobachtungen zu machen, besonders da man auf diesem Wege etwaige Störungen sofort bemerkt und sie beseitigen kann. Deshalb sind die mit wenig zahlreichen Punkten festgelegten Kurven wenigstens für die vorläufigen Zwecke nicht von geringerem Werte, als einzelne kontinuierlicher aufgenommenen.

Was die Genauigkeit der Messung anlangt, so ist sie, wie die Diagramme beweisen, meistens eine sehr befriedigende, zumal, wenn man beachtet, daß eine jede Störung im äußeren Stromkreise (besonders im Laufe der Hochspannungsmaschinen) prozentual die *erste Potenz* der Klemmenspannung der Röhre beeinflußt, daß aber *das Quadrat* des Potentialgefälles zur Messung und Darstellung gelangt. Es ist aus einigen Kurven erkenntlich, daß man die Genauigkeit — was, wie gesagt, vorläufig keine Verwendung finden würde — im Bedarfsfalle gleichmäßig und sehr beträchtlich steigern könnte. Denn an und für sich ist die Konstanz der Erscheinungen eine überaus große. Man müßte dann allerdings den eigentlichen Beobachter von der Überwachung des Versuchsbetriebes entlasten, und besonders dafür sorgen, daß der Antrieb der Hochspannungsmaschinen immer von der Institutsbatterie während der Messung erfolgt. In der Regel dauern nämlich die Messungen zu lange, um mit der Kapazität der Institutsbatterie auskommen zu können. So arbeitet man meistens mit der Stadtleitung, wodurch natürlich die Genauigkeit der Messungen verringert wird, lieber, als daß man die Aufmerksamkeit noch durch ein öfteres Umschalten des die Maschinen treibenden Stromes belastet.

§ 2. Beeinflussung des Potentialgefälles durch die geometrischen Verhältnisse; Spektralbeobachtungen.

Längs der Entladungsröhren ist das Potentialgefälle wie folgt verteilt. An der Oxydkathode beträgt es wenige Volt je nach dem Zustande der Kathode; durch das Erhöhen des Vakuums gegen das im allgemeinen mit Luftpumpen erreichbare ist hier eine Änderung nicht zu verzeichnen. Der Beweis ist, wie leicht denkbar, durch das Anbringen einer Sonde in der Nähe der Kathode geführt worden.

Längs der Achse der Entladungssäule ist das Potentialgefälle im Geltungsbereiche des Gesetzes $J = \alpha v^2 + \beta$ linear verteilt. Und zwar nimmt es bei höherer Gasdichte, also am Anfang des Untersuchungsgebietes in der Richtung von der Kathode nach der Anode zu und erreicht dann sehr bald bei einem einigermaßen besseren Vakuum eine lineare Verteilung — natürlich konstanten Querschnitt vorausgesetzt. Der Be-

weis läßt sich einfach durch eine Reihe hintereinander angebrachter Sonden führen. Durch diese Tatsache erscheint es *gerechtfertigt* — was von vornherein durchaus nicht einleuchtet — von der *Existenz einer „positiven Lichtsäule“ in dem extremen Vakuum zu sprechen.*

An der Anode ist, wenigstens solange dieselbe hinreichend ausgedehnt ist, ein besonders gegen sonst bemerkenswerter Abfall nicht vorhanden.

Quer zur Achse ist die Bestimmung der Verteilung des Potentialgefälles mit den angewandten Methoden nicht ausführbar. Benutzt man jedoch die Röhre mit dem totalreflektierenden Prisma (vgl. Fig. 6, p. 685), so sieht man, solange der Grenzwert des Vakuums, von dem an die Charakteristik keine weitere Änderung erfährt, nicht unterschritten ist, einen scharfbegrenzten Faden in der Achse der Röhre verlaufen, der das O-Kathodenstrahlen-Bandenspektrum, neben Kohlewasserstoffbanden vielleicht auch das H-Spektrum emittiert. Man wäre geneigt, auf Grund dieses Aussehens zu vermuten, daß bei weitem die größte Stromdichte in der nächsten Umgebung der Achse verläuft.

Wird nun aber das Vakuum weiter verbessert, so schrumpft der Faden immer mehr zusammen, bis er schließlich verschwindet — und mit ihm auch jede Spur eines diskontinuierlichen Spektrums; wenigstens soweit ein einfaches Spektroskop es sichtbar zu machen gestattet, da mit lichtstarken Apparaten bisher noch nicht gearbeitet wurde. Es bleibt dann nur eine im Querschnitt kontinuierlich verteilte Lumineszenz übrig, die auch ein merklich kontinuierliches Spektrum liefert. Diese Tatsache sowie das unten abzuleitende Gesetz, daß die Charakteristik eindeutig durch die Stromdichte gegeben und sonst unabhängig von den Rohrdimensionen ist (vgl. p. 727), spricht gegen die Annahme einer Kontraktion des Stromquerschnittes. Es scheint im Gegenteil der innere diskontinuierlich leuchtende Faden eher ein den Striktionskanalstrahlen verwandtes Gebilde zu sein, welches auch mit der auffälligen Emission des D-Lichtes (p. 716) zusammenhängt und dann bei sehr tiefem Vakuum, in dem offenbar die Existenzmöglichkeit von Kanalstrahlen stark zurückgeht, verschwindet.

Die Abhängigkeit des Potentialgefälles vom Querschnitte

der Strombahn bei gleicher Stromstärke, also von der Stromdichte, wurde mit dem Apparat horizontaler Bauart (Fig. 12) ermittelt. Es kamen drei Querschnitte in Frage. Die Durchmesser im Lichten (20,0, 14,6, 9,5 mm) wurden nach der Zerlegung¹⁾ des Apparates mit der Schubleere tunlichst genau

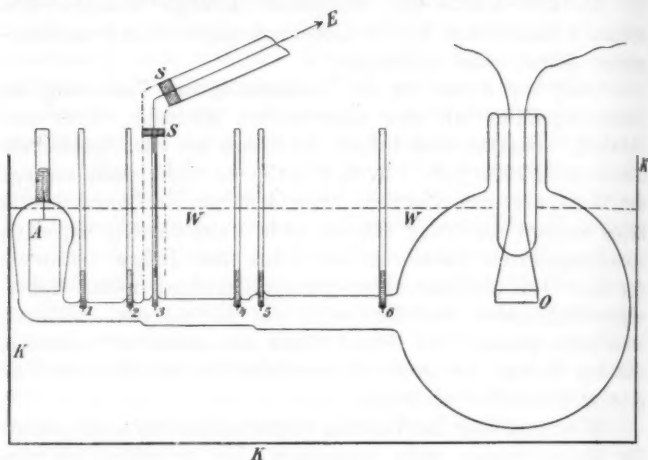


Fig. 12.

bestimmt, ebenso, um die optischen Verzerrungen an den Glaswänden keine Fehler in die Messung hereinbringen zu lassen, die Entfernung der Sonden. Diese letztere (entsprechend 630, 500, 315 mm) ist nach einem Vorversuche so gewählt worden, daß an den einzelnen in Frage kommenden Sondenpaaren annähernd die gleiche Potentialdifferenz bei gleicher Stromstärke bestand, um mit ein und derselben Empfindlichkeit des Elektrometers die Bestimmung ausführen zu können.

Es muß beachtet werden, daß sowohl die Sonden, als auch die Übergänge aus einer Röhrenweite in eine folgende es nicht zulassen, daß die Röhren streng zylindrisch verlaufen. Außerdem sind Glasröhren von etwa 20 mm lichter Weite

1) Die Zerlegung wurde erst nach dem Erscheinen der letzten Publikation vorgenommen, ich bin also in der Lage, hier das erstmal genauere Zahlen mitzuteilen.

stets an und für sich mit Änderungen des Durchmessers um 5–10 Proz. behaftet. Deshalb ist die Bestimmung des Gesetzes der Abhängigkeit der Charakteristik vom Querschnitt — ganz abgesehen von der Ungenauigkeit der Bestimmung auch des Sondenabstandes — mit einem einigermaßen handlichen Apparat nur in erster Annäherung möglich. Da jedoch dieses Gesetz, wie aus den Ausführungen des allgemeinen Teiles erhellt, an Interesse gewonnen hat, muß es weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, hier größere Genauigkeit zu erzielen.

Die Resultate ergaben, daß, auf die Längeneinheit umgerechnet, die Potentialgefälle sich in zwei unabhängigen Versuchen einmal wie 28:38:60, dann das zweitemal wie 14,7:20,1:35 verhielten, in der Reihenfolge der abnehmenden Durchmesser dargestellt. Schreibt man unter eine jede dieser Zahlen die ihr entsprechende Durchmesserlänge auf, und führt die Multiplikation je zwei übereinander stehender Zahlen aus, so wird:

28	38	60	14,7	20,1	35
20	14,6	9,5	20,0	14,6	9,5
56	55,5	57,0	29,4	29,2	33,1

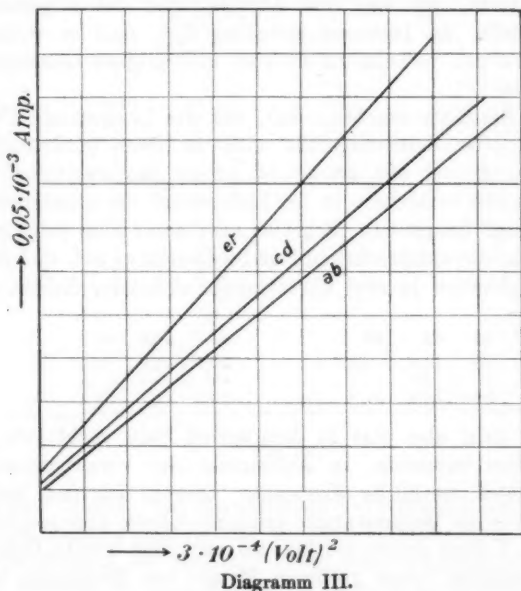
Man sieht also eine in dem ersten Falle recht gute, in dem zweiten immerhin, in Anbetracht der vorausgenannten Fehlerquellen merkliche Konstanz. Obwohl ich dem ersten Fall, da hier die Bestimmungen tunlichst schnell hintereinander erfolgten, Vorzug geben möchte, sei auch das zweite Beispiel als Repräsentant einer größeren Menge von Messungen hier mitgeteilt.

In Worten lautet dieses Resultat: *Das Potentialgefälle ist, gleiche Gasdichte vorausgesetzt, bei gleicher Stromstärke dem Röhrendurchmesser annähernd umgekehrt proportional.* Bezeichnet man die Potentialgefälle zweier Röhren mit den Radien r_1 bzw. r_2 mit v_1 bzw. v_2 , so ist:

$$(2) \quad v_1 : v_2 = r_2 : r_1.$$

Es wäre von Interesse, die Stromcharakteristik für verschiedene Querschnitte in vergleichbarer Weise anzugeben. Da die Entladungsröhre jedoch, als eine horizontal gebaute, im Ofen nicht hoch genug erhitzt werden konnte, folglich die

Kurven sich während eines längeren Betriebes nicht konstant hielten, sind dieselben einer näheren Diskussion in dieser Richtung nicht fähig. Es mag nur andeutungsweise ein Diagramm mit ungefähr gültigen dem Gesetze $J = \alpha v^2 + \beta$ folgenden Teilen der Charakteristiken gegeben werden, welche bis zum Schnitt mit der J -Achse durchgeführt worden sind, um zu



zeigen, wie ungefähr die β sich mit dem Querschnitt zu ändern pflegen. Da, wie leicht ersichtlich, eine jede Änderung der Nullpunkte die Werte der β stark modifiziert, so kommt noch dieses als Fehlerquelle hinzu, um die Entnahme eines klaren Gesetzes für die Änderung dieser Größen unmöglich zu machen. Man sieht nur eines, daß nämlich die β mit wachsendem Röhrenquerschnitte jedenfalls sehr merklich zunehmen.

Die erwähnten Fehler der β behaften die Genauigkeit der Messung der Änderung des Potentialgefälles mit der Stromdichte weniger, da sie gegen die Stromdichten, bei denen gemessen wurde, vernachlässigt werden können.

V. Eine Deutung der Ergebnisse.

§ 1. Allgemeines.

Versucht man, von allgemeineren Gesichtspunkten aus, ein zusammenfassendes Bild der für das behandelte Gebiet gültigen Gesetze zu entwerfen, so muß man in erster Linie auf die p. 720 erwähnte lineare Verteilung des Potentialgefälles längs der Achse der Entladung im Geltungsbereiche der Gleichung $J = \alpha v^2 + \beta$ eingehen.

In der Tat ergibt sich hieraus der grundlegende Schluß, daß die in einem Volumen der Entladungsbahn verbrauchte Energie *nicht* den in geordneter Bewegung zwischen den Elektroden elektrische Ladungen transportierenden Teilchen als Zuwachs ihrer kinetischen Energie mit auf den weiteren Weg gegeben wird. Im Gegenteil, diese verbrauchte Energie wird in dem betreffenden Volumen selbst vollständig in ungeordnete Bewegung (Erhitzung der Röhrenwand) umgesetzt. Denn man hat es ja mit einem Raume zu tun, der durch ein äußerst weitgehend verdünntes Gas ausgefüllt ist; würde also die Energie zu einem merklichen Teil für die Beschleunigung der stromtransportierenden Teilchen verwendet werden, so müßte, die große Beweglichkeit (die große freie Weglänge) der negativen Elektronen vorausgesetzt, das Potentialgefälle nach der Anode zu beträchtlich abnehmen, während es anfangs bei höherer Gasdichte in diesem Sinne eher zunimmt, um dann ganz präzise linear längs der Achse sich zu verteilen. Es entsteht also die Frage: weshalb müssen große Energiemengen in ungeordnete Bewegung umgesetzt werden, wenn die Stromleitung bei einem extrem vorgeschrittenen Vakuum aufrecht erhalten werden soll, bei dem sonst die mittlere freie Weglänge der Elektronen, die Dimensionen des Rohres bei weitem überschreiten?

In diesem Zusammenhange ist es wohl nicht mehr als eine Beschreibung der Tatsachen, wenn man zusammenfassend sagt: „die mittlere freie Weglänge ist hier ungleich viel kleiner, als dieselbe in Funktion des Gasdruckes allein sich ergeben würde“. ¹⁾

1) Vgl. Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 60. 20. Juli 1908.

Sucht man nun nach der physikalischen Ursache einer derartigen Abnahme der mittleren freien Weglänge, so kann man aus der gemeinsamen Form der mitgeteilten Diagramme 1—21 einen gewissen Einblick in das Wesen der Sache gewinnen. Die Entladung setzt bei einem geringen, wohl durch die Ladungen an den Glaswänden bedingten und deshalb meistens schlecht definierten (vgl. Satz c) p. 700) Potentialgefälle ein. Dann wächst zunächst das Quadrat des Potentialgefälles wesentlich schneller als mit der ersten Potenz der Stromdichte (vgl. p. 719). Es ist also, als ob die Entladung sich selbst Hindernisse in ihrer Bahn schaffen würde und zwar, wenn man sich diese Hindernisse als von diskreten Zentren herstammend denkt, so würde die Zahl dieser Zentren einen erklärlicher Weise (da die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes mit der Anzahl der die Elektronen ablenkenden Zentren wächst) mit der Stromdichte rasch wachsenden Anstieg erleiden. Dieser rasche Anstieg würde dann fortbestehen bleiben, bis eine gewisse Grenze im Verhältnisse der von der Kathode herrührenden Elektronendichte zu der Gasdichte (vgl. die Ableitung p. 731, sowie die Charakterisierung des Untersuchungsgebietes p. 674) überschritten worden ist. Von nun an wäre der Anstieg ein langsamerer und in dem Gültigkeitsbereiche des Gesetzes $J = \alpha v^2 + \beta$ konstanter. Daß die Bildung der Hinderniszentren mit der Gasdichte zusammenhängt, sieht man auch daran, daß, je größer die Gasdichte, desto eher das für die jeweilige Gasdichte überhaupt erreichbare Maximum der Verhältniszahl der Anzahl der Zentren zur Elektronendichte eintritt, was übrigens nur in anderen Worten den Inhalt des Erfahrungssatzes a), p. 700 ausdrückt. Nun liegt es nahe, anzunehmen, daß diese Zentren von den Elektronen durch Stoß oder ähnliche Wirkungen gebildete Ionen sind, welche ihrer großen trägen Masse wegen für die Stromleitung wenig in Betracht kommen. In der Tat ist es einleuchtend, daß bei dem extrem hohen Vakuum die gesteigerte Anziehungskraft, die ein Ion im Vergleich mit einem Molekül den Kathodenstrahlen gegenüber besitzt, sich in der Erhöhung des statistischen Mittelwertes der Zusammenstöße bereits bemerkbar macht.

Man gelangt also zu dem Ergebnis, daß die außerordentliche Verringerung der mittleren freien Weglänge der negativen

Elektronen bei hochgradigem Vakuum durch eine passende elektrische Erregung des Gases derart verursacht wird, daß der im Vergleiche mit der Wirkungssphäre eines nicht isolierten Moleküls sehr große Aktionsradius eines Ions (langsamen) Elektronen gegenüber bei geringer Gasdichte im statistischen Mittelwerte der Anzahl der Zusammenstöße durch die Erhöhung dieses Mittelwertes zur Geltung gelangt.

Im folgenden sollen die Entladungsgesetze, sei es in dem hier allgemein skizzierten Sinne näher gedeutet, sei es zur Bekräftigung obiger Auffassung umgeformt werden.

§ 2. Die Unabhängigkeit vom Röhrenquerschnitt.

Es seien gegeben bei einem bestimmten Vakuum und bei den Stromstärken J_1 bzw. J_2 die Potentialfälle v_1 und v_2 zweier zylindrischer Röhren mit den Radien r_1 bzw. r_2 (Fig. 13). Dann gelten die Gesetze

$$(1) \quad \begin{cases} J_1 = \alpha_1 v_1^2 + \beta_1 \\ J_2 = \alpha_2 v_2^2 + \beta_2 \end{cases}$$

und für

$$(2) \quad \begin{cases} J_1 = J_2 = J \\ v_1 : v_2 = r_2 : r_1, \end{cases}$$

wo $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ im allgemeinen Funktionen der Röhrenquerschnitte der Natur der Gefäßwände, der Gasdichte und der sonstigen Beschaffenheit des von der Entladung durchströmten Raumes sind.

Setzt man in (1) $J_1/J_1 = J_2$ und subtrahiert die beiden Seiten der Gleichungen voneinander, so wird:

$$\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2 = \beta_2 - \beta_1$$

oder

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{\alpha_2 v_2^2} = 1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 v_2^2}.$$

Soll diese Beziehung, was tatsächlich zutrifft, für Stromstärken gelten, bei denen

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 v_2^2} \text{ klein gegen 1 ist,}$$

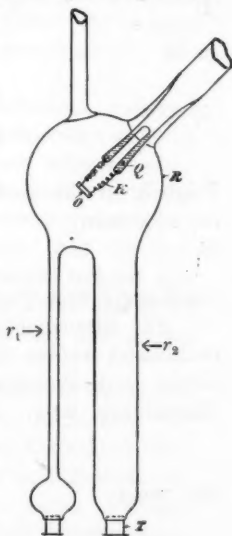


Fig. 13.

so muß sein:

$$\alpha_1 : \alpha_2 = v_2^2 : v_1^2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Da nun α von der Stromstärke unabhängig ist, so gilt obiges im ganzen Geltungsbereiche von (1) und (2). Man kann also ganz allgemein schreiben

$$(5a) \quad \alpha_1 = \pi \kappa \cdot r_1^2, \quad \alpha_2 = \pi \kappa \cdot r_2^2$$

$$\begin{cases} J_1 = \pi \kappa r_1^2 v_1^2 + \beta_1 \\ J_2 = \pi \kappa r_2^2 v_2^2 + \beta_2, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \frac{\partial \kappa}{\partial r} = 0.$$

Setzt man nun:

$$(4) \quad i_1 = \frac{J_1}{r_1^2 \pi}, \quad i_2 = \frac{J_2}{r_2^2 \pi},$$

so ist

$$(5) \quad \begin{cases} i_1 = \kappa v_1^2 + \frac{\beta_1}{r_1^2 \pi}, \\ i_2 = \kappa v_2^2 + \frac{\beta_2}{r_2^2 \pi}. \end{cases}$$

Folglich ist für große Stromdichten, wo $\beta/r^2 \pi$ klein gegen i ist, allgemein

$$(6) \quad i = \kappa v^2,$$

unabhängig vom Querschnitte der Entladung.

Für Stromdichten, bei denen $\beta/r^2 \pi$ gegen i nicht vernachlässigt werden darf, wäre die Beziehung zwischen Stromdichte und Potentialgefälle unabhängig von den Röhrendimensionen, wenn

$$\frac{\beta_1}{r_1^2 \pi} = \frac{\beta_2}{r_2^2 \pi} = \beta \text{ wäre,}$$

also wenn

$$\beta_1 = r_1^2 \pi \beta, \quad \beta_2 = r_2^2 \pi \beta$$

wäre. Dann gälte ganz allgemein

$$(6a) \quad i = \kappa v^2 + \beta.$$

Erst in dem dieser Veröffentlichung unmittelbar vorausgehenden Stadium der Untersuchung hat das Verhalten der

Werte von β einen bestimmten Sinn für das Verständnis der Vorgänge auf Grund des p. 730—731 entwickelten Zusammenhanges gewonnen. Aus dem früher angesammelten Material läßt sich aber nur das eine mit Bestimmtheit aussagen, daß wenn $r_1 > r_2$, $\beta_1 > \beta_2$ ist (p. 724). Ob jedoch und in welchem Maße ein Bestandteil von der Form $r^2 \pi \beta$ für die funktionelle Abhängigkeit der β vom Querschnitt maßgebend ist, muß einer speziellen Untersuchung dieses Gegenstandes vorbehalten bleiben.

Formuliert man noch einmal das Gesetz der Gleichung (6), so heißt es in Worten: Setzt man die Gültigkeit der Gesetze (1) und (2) voraus und beschränkt sich auf das Gebiet, wo die Stromstärken J_1 und J_2 hinreichend groß gegen β_1 und β_2 sind, so ist, gleiche Gasdichte angenommen, *die Potentialverteilung längs der Strombahn eindeutig durch die mittlere Stromdichte bestimmt, unabhängig von den Dimensionen der Entladungsröhre.*

Daraus kann mit großer Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, daß die Stromdichte für den Geltungsbereich von (6) im ganzen Querschnitt homogen verteilt ist. Denn wäre sie etwa, wie es bei den Gasentladungen häufig der Fall ist, in der Achse am größten, so würde man die Gleichung (6) nur durch die unplausible Annahme begründen können, daß die Verteilung der Stromdichte bei verschieden weiten Röhren einander streng ähnlich ist, während es in der Natur der Sache liegt, bei kleinen Querschnitten eine bedeutend homogenere Verteilung anzunehmen als bei großen.

Vergleicht man das Gesetz (6) mit den bei dem Gasdrucke der Geissleröhren etwa für die positive Lichtsäule gefundenen, so wird man nicht nur durch die Einfachheit desselben überrascht. Die Unabhängigkeit von dem Entladungsquerschnitt muß gerade bei dem extrem hohen Vakuum bemerkenswert erscheinen, wo den landläufigen Anschauungen zufolge die mittlere freie Weglänge der Molekeln sowohl wie der Elektronen die Dimensionen des Gefäßes vielfach übersteigen müßte. Man wird also folgerichtig in der Gleichung (6) eine gewichtige Bestätigung der Annahme erkennen, daß bei dem behandelten Entladungsvorgang die mittleren freien Weglängen als verschwindend klein den Gefäßdimensionen gegen-

über aufgefaßt werden müssen, daß also von einer außerordentlichen Zunahme des Aktionsradius der im leeren Raume verteilten Zentren gesprochen werden muß.

Außerdem sieht man, daß je zwei der drei Gleichungen (1), (2) und (6) die dritte hinreichend und notwendig bedingt. Dieses ist physikalisch von Interesse, wenn man in den Kreis der Erwägungen auch noch die Tatsache hinzuzieht, daß von einem gewissen Grenzwerte des Vakuums an bei abnehmender Gasdichte für eine festgehaltene Stromstärke oder, wie nunmehr gesagt werden kann, für eine festgehaltene Stromdichte, das Potentialgefälle unverändert bleibt. Das liefert zufolge der Gleichung (6), falls wir den so definierten Grenzwert von α mit K bezeichnen

$$(7) \quad \begin{cases} i = K v^2 \\ \frac{\partial K}{\partial N} = 0, \end{cases}$$

wo N die Gasdichte bezeichnet. Nach Gleichung (3) ist außerdem

$$(8) \quad \frac{\partial K}{\partial r} = 0.$$

Also ist K dem bei der Einführung der Funktion α Gesagten zufolge nur noch — möglicherweise — erstens eine Funktion der chemischen Natur der die Gasfüllung bildenden Moleküle, und zweitens eine Funktion der sonstigen Beschaffenheit des durchströmten Raumes. Es wird im nachfolgenden, soweit es aus dem vorliegenden Material sich ergibt, einiges über die beiden Variabeln, insbesondere über die erste, ausgesagt werden. An dieser Stelle soll nur noch dem am Anfang dieses Paragraphen erwähnten Zusammenhange ein physikalischer Sinn beigelegt werden. Die Unabhängigkeit des K von der Gasdichte läßt, wie aus den weiteren Überlegungen sich ergeben wird, darauf schließen, daß K ein in erster Linie von der zur Abspaltung positiver Ladungen von den Molekeln erforderlichen Elektronendichte abhängiger Faktor ist, dessen Unabhängigkeit von N es bedingt, daß die negative Volumenladung nicht über einen Maximalwert gesteigert werden kann. Seiner Natur nach müßte K also von der Begrenzung des Raumes unabhängig sein. Es wäre von diesem Standpunkte aus befremdend, wenn es sich erwiesen

hätte
dem
Wort
abhän
Dimer
funkti
I
eines
den G
daß d
und r
hängig
Und v
Wege
maßge
steht,
stets d

D

läßt si
stellun
besond
räumlic
und d
Momen
kathod
der po
ionisati
und da
des Ge
tiven E

1)
der hier
Stehs. G

hätte, daß in der Gleichung $i = Kv^2$ der Koeffizient K von dem Röhrenquerschnitt mitbedingt wäre, wenn mit anderen Worten die Charakteristik der Entladung vom Drucke unabhängig wäre, und von der offenbar viel weniger wesentlichen Dimensionierung der Entladungsröhre in ihrer Beschaffenheit funktionell beeinflußt würde.

In diesem Sinne schließt sich die Tatsache der Existenz eines von N unabhängigen Grenzwertes des α befriedigend der den Gleichungen (1), (2) und (6) zugrunde liegenden Tatsache an, daß die Entladungscharakteristik allein durch die Stromdichte, und nicht durch die Stromstärke unter komplizierter Abhängigkeit von der Gestaltung des Entladungsrohres gegeben ist. Und würde man umgekehrt aus der Gleichung (7) auf diesem Wege folgern, daß nur die Stromdichte für die Charakteristik maßgebend ist, also daß die Gleichung (6) oder auch (6a) besteht, so würde daraus und aus einer der Gleichungen (1), (2) stets die zweite folgen.

§ 3. Ableitung des Gesetzes der Charakteristik.

Das Gesetz

$$J = \alpha v^2 + \beta^1)$$

läßt sich unter gewissen Annahmen aus den üblichen Vorstellungen über die Elektrizitätsleitung in Gasen, und insbesondere über den kausalen Zusammenhang zwischen der räumlichen Dichte der Elektrizitätsträger, dem Potentialgefälle und der Stromstärke ableiten. Dabei soll als das primäre Moment die räumliche Dichte n_- der negativen, von der Oxydkathode emittierten Elektronen aufgefaßt werden. Die Dichte der positiven Ladungen n_+ , welche man sich etwa als durch ionisationsähnliche Vorgänge entstanden denken kann, sei — und das ist das Wesen der Annahme — im Wirkungsbereiche des Gesetzes $J = \alpha v^2 + \beta$ der räumlichen Dichte der negativen Elektronen n_- proportional

$$\frac{n_-}{n_+} = a \quad (a > 1),$$

1) Man vergleiche die unter vereinfachten Voraussetzungen gegebene der hier folgenden analoge Ableitung, Ber. d. math.-phys. Klasse d. Kgl. Sachs. Ges. d. Wissensch. 60. p. 219—220.

wo a unter sonst konstanten Umständen eine Funktion der Gasdichte N ist. Es ist leicht ersichtlich, falls man sich wie üblich vorstellt, daß die positiven Ladungen von der Materie herrühren, daß a mit wachsender Gasdichte abnehmen wird, daher $\partial a / \partial N \leq 0$, was ja auch durch den Anstieg des Gefälles bei abnehmender Gasdichte bestätigt wird.

Proportionalität soll auch zwischen n_- bzw. n_+ und der direkt an der Stromleitung beteiligten Anzahl dieser Träger — für welche eine besondere Bezeichnung einzuführen sich erübrigt — bestehen, so daß also aus n_- alle diese übrigen Größen linear folgen.

J sei nun der Gesamtstrom im stationären Zustand. Eine Änderung desselben dJ wird nach der obigen Auffassung mit der Änderung der Dichte n_- um dn_- verknüpft sein. Folglich ändert sich n_+ um $dn_+ = (1/a) dn_-$. Es liegt nun auch sonst nahe, und wird durch das Bestehen der Gleichung (6) noch wahrscheinlicher gemacht, daß die Verteilung der das Potentialgefälle im Raume bedingenden Ladungen bei dieser Änderung sich *geometrisch ähnlich* bleibt, daß also die Änderung des Potentialgefälles einfach der Änderung der Raumladung proportional gesetzt werden kann

$$(9) \quad dv = p(dn_- - dn_+) = p\left(dn_- - \frac{1}{a} dn_-\right) = p \frac{a-1}{a} dn_-.$$

Nun hängt die Stromzunahme dJ außer von der Anzahl der stromtransportierenden Teile auch noch von ihrer Geschwindigkeit ab. Auch hier besteht Proportionalität. Da aber andererseits die Geschwindigkeit dem Potentialgefälle proportional ist, so ist unter den gemachten Annahmen

$$(10) \quad dJ = b v dn_- ,$$

wo (6) ein in erster Linie von der Beweglichkeit der leitenden Teile abhängender Faktor ist. Führt man für dn_- den Wert aus (9) ein

$$dn_- = \frac{1}{p} \frac{a}{a-1} dv ,$$

so wird

$$(11) \quad dJ = \frac{1}{p} \frac{a b}{a-1} v dv .$$

Setzt man

$$(12) \quad \frac{1}{p} \frac{a b}{a-1} = 2 \alpha ,$$

und integriert dann (11) unter Einführung der Integrationskonstante β , so ergibt sich schließlich

$$(1) \quad J = \alpha v^2 + \beta.$$

Aus der vorausgehenden Ableitung ergibt sich für a und b unter Einführung der Gleichungen

$$(7) \quad K = \frac{\alpha}{\pi r^2} \frac{\partial K}{\partial N} = 0$$

einiges über diese Funktionen. Mit Rücksicht auf (12) ist

$$K = \frac{1}{2 r^2 p \pi} \cdot \frac{a b}{a - 1}.$$

Beachtet man nun, daß r und p ihrem Wesen nach von N unabhängig sind, so bedeutet $\partial K / \partial N$ im wesentlichen

$$\frac{\partial \left(\frac{a b}{a - 1} \right)}{\partial N} = 0.$$

Führt man die Differentiation aus, so wird

$$(14) \quad \left(1 - \frac{1}{a} \right) \frac{\partial b}{\partial N} - \frac{b}{a^2} \frac{\partial a}{\partial N} = 0,$$

dabei ist wegen $a > 1$

$$1 - \frac{1}{a} > 0.$$

Da nun in dem Geltungsbereiche von K das Potentialgefälle mit variierendem N sich nicht ändert, ist

$$\frac{\partial v}{\partial N} = 0,$$

folglich auch

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)}{\partial N} = 0.$$

In Anbetracht dessen, daß p unabhängig von N ist, lautet obiges mit Hilfe von (9)

$$\frac{\partial \left(\frac{a - 1}{a} \right)}{\partial N} = 0.$$

Also

$$(15) \quad \frac{\partial a}{\partial N} = 0,$$

und wegen (14)

$$(16) \quad \frac{\partial b}{\partial N} = 0.$$

(15) besagt: $n_-/n_+ = a$ ist von N unabhängig, also: *von einem gewissen Maximalwerte der Gasdichte ab ist die Anzahl der pro negativen Ladung, also pro negatives Elektron gebildeten positiven Ladungen unabhängig von der Gasdichte.*

Da man als die Urheber der positiven Ladungen die Molekeln bzw. die Atome aufzufassen pflegt, kann man diesem Resultate auch die Fassung beilegen: *Die Anzahl der pro Molekel bestehenden positiven Ladungen wächst dauernd im Geltungsbereiche der von der Gasdichte unabhängigen Funktion K bei abnehmender Gasdichte, falls die sonstigen Bedingungen (das Potentialgefälle) konstant gehalten werden.*

Da man sich nun ferner, die negativen Elektronen immer wieder als das primäre Moment aufgefaßt, die Bildung der positiven Ladungen als das Resultat von durch die Elektronendichte und die Anzahl und Energie ihrer Stöße bedingten Einwirkungen auf die Materie denken wird, so wird man sich vorstellen müssen, daß die Intensität dieser Einwirkungen, also die einer Molekel bzw. Ion zugeführte Energiemenge, nicht über einen bestimmten Grenzwert gesteigert werden kann, ohne daß eine positive Ladung erzeugt wird. Ob man sich nun diese Ladungen als mit den Molekeln zu vielwertigen Ionen verbunden zu denken hat, oder ob man ihnen ein selbstständiges Fortbestehen im Raume beilegen soll, bleibt zunächst eine offene Frage.

Die Art, wie man sich das Erzeugen positiver Ladungen an der Materie durch die Einwirkung der Elektronen zu denken hat, falls man eine geringe Gasdichte einerseits, eine große Elektronendichte andererseits betrachtet¹⁾, scheint mir nicht ausschließlich durch die kinetische Energie des einzelnen Elektrons in der üblichen Vorstellungsweise gegeben zu sein. Man muß vielmehr auch die räumliche Dichte und die Frequenz der Elektronen und ihrer Stöße mit in Rechnung ziehen, falls diese Stöße häufig genug sind, um bei der Abspaltung der positiven Ladungen ihre Energie additiv dem Molekül zuführen zu lassen.

1) Vgl. Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. p. 133. 1907.

Offenbar ist es zu diesem Zwecke erforderlich, daß die Frequenz der Stöße kommensurabel oder von einer höheren Ordnung ist, als die Schwingungsfrequenz der an das Molekül angekoppelten, abzusplittenden Ladung. Eine verwandte Erscheinung ist bei der Erregung der Fluoreszenz durch Kanalstrahlen von Kunz (Phil. Mag. 14. p. 614) beobachtet worden, welcher fand, daß der Grenzwert der Geschwindigkeit, welcher für Fluoreszenzerregung nötig ist, geringer genommen werden kann, falls das Kanalstrahlenbündel reicher an Ionen wird.

Man kann andererseits die Unabhängigkeit der Anzahl der unter sonst gleichen Umständen erzeugten positiven Ladungen von der Anzahl der Molekeln auch so auffassen, daß von dem genannten Maximalwerte der Gasdichte ab überhaupt kein merklicher ursächlicher Zusammenhang zwischen positiver Ladung und Materie besteht. Dann würden also diese positiven Ladungen im leeren Raume (im Äther) außerhalb der Molekeln und unabhängig von diesen entstehen und auch weiter existieren müssen.

Gelingt es, die technische Ausführbarkeit (vgl. p. 713) vorausgesetzt, die chemische Natur der Gasreste des hochgradigen Vakuums in definierter Weise zu variieren, so wird man eine Wahl zwischen den beiden Annahmen auf experimenteller Grundlage treffen können. Es wird sich dann zeigen, ob die von der Gasdichte unabhängige Größe K eine allgemeine, oder eine von der chemischen Natur des Gases abhängige Funktion ist.

Auch die Gleichung (16), $\partial b / \partial N = 0$, läßt einige Schlüsse zu. Da b als im wesentlichen von der Beweglichkeit der geladenen Teilchen abhängig bezeichnet wurde, so bedeutet diese Gleichung, daß die Beweglichkeit der Elektrizitätsträger unabhängig von der Gasdichte ist. Es liegt nahe, für die negativen Elektronen die Annahme einzuführen, daß ihre mittlere freie Weglänge unverändert bleibt, da die Abnahme der Molekelzahl durch die Zunahme des Aktionsradius der übrig bleibenden Molekeln in dieser Hinsicht aufgehoben werden kann.

Wollte man die obige Folgerung auch für die positiven Ladungen plausibel erklären, so würde man für den Fall, wo man die positiven Ladungen als an der Materie festhaftend annehmen wollte, auf einen Widerspruch stoßen; denn die

Beweglichkeit eines vielwertigen Ions ist größer, als die eines einwertigen Ions gleicher Masse. Man müßte dann zu der Möglichkeit die Zuflucht ergreifen, daß die vielwertigen Ionen selbst infolge ihrer großen trägen Masse oder auch einer sehr kleinen freien Weglänge sich nicht merklich an der Leitung beteiligen.

Selbstverständlich könnte man auch andere Arten von Vorstellungen hier einführen. *Am einfachsten würde sich jedoch die Sache gestalten, falls man die Existenz freier positiver Ladungen von konstantem Verhältnis der Ladung zur Masse unabhängig von der Materie endgültig nachweisen könnte.*

Schließlich sei auch noch darauf hingewiesen, daß auch das Gesetz (p. 719), welches besagt, daß für geringe Stromdichten das Potentialgefälle angenähert wie $J^{1/2}$ wächst, sich unter ähnlichen Voraussetzungen ableiten und seine Unabhängigkeit vom Drucke sich ähnlich deuten läßt, wie dieses für $J = \alpha v^2 + \beta$ geschehen ist.

Obwohl eine derartige Ausführung einige der entwickelten Ansichten zu stützen, ganz besonders aber ein Argument für das von der Materie unabhängige Entstehen positiver Ladungen im Raume zu liefern fähig wäre, soll vorläufig hiervon Abstand genommen werden. Denn man erkennt ohnehin, daß bei der Diskussion der Gleichungen (15) und (16) das vorliegende experimentelle Material zu versagen anfängt. Es liegt auf der Hand, daß man das letztere in mehreren Richtungen vervollständigen kann.

Erstens ist von einer weiteren Verbesserung des Vakuums in mancher Beziehung Aufklärung zu erwarten, indem man in den Versuchen die flüssige Luft durch flüssigen Wasserstoff ersetzt.

Zweitens wäre es von Interesse, wie bereits erwähnt wurde, Methoden für das Einführen chemisch wohldefinierter Gase in das hochgradige Vakuum und die Untersuchung ihres Verhaltens auszuarbeiten.

Drittens kann auch die Frage behandelt werden, ob sich die mittlere freie Weglänge von Elektronen *bekannter* Geschwindigkeit in der Lichtsäule näher bestimmen läßt, da

daraus unter anderem auch auf die Gasdichte, die sich zurzeit jeder Beurteilung entzieht, geschlossen werden könnte.

Schließlich muß die durch die letzten Resultate wieder in den Vordergrund gerückte Frage nach der Natur der positiven Ladungen behandelt werden, besonders, da einige früheren Versuche in dieser Richtung, wenn sie auch nicht endgültig beweisend waren, so doch ebensowenig widerlegt sind und ihrer Aufklärung harren.

VI. Zusammenfassung.

§ 1. Die experimentellen Befunde.

A) Vorausgesetzt, daß man die Stromdichte genügend groß nimmt, ist es berechtigt, in dem höchsten bisher erreichten Vakuum noch von der Existenz desjenigen von den Elektroden hinreichend weit entfernten Teiles der Entladung zu sprechen, welcher bei weit höherem Druck als die positive Lichtsäule bezeichnet zu werden pflegt (vgl. p. 721).

B) In dem Gebiete der Untersuchungen gilt für Stromdichten, welche über einen gewissen Minimalwert hinausgehen,

$$(6) \quad i = \kappa v^2,$$

wo κ ein von der Röhrenform unabhängiger Faktor ist (p. 727 bis 731, insbesondere p. 728, Gleichung (3)).

Der Zusammenhang zwischen Stromdichte und Potentialgefälle ist also von der Gestalt der Entladungsbahn in dem im Texte näher erörterten Sinne unabhängig (p. 729).

C) Von einem Maximalwerte der Gasdichte abwärts ist die Charakteristik der Entladung von der Gasdichte überhaupt unabhängig (p. 713); es ist also insbesondere für den unter B) gekennzeichneten Teil:

$$(7) \quad \frac{\partial \kappa}{\partial N} = 0. \quad (\text{p. 730})$$

D. Ist die Gasdichte genügend gering, so gilt für Stromdichten, welche zwischen 0 und dem Gebiete der Sätze B) u. C) liegen, das Gesetz, daß das Potentialgefälle wie $J^{1/2}$ wächst (p. 719).

§ 2. Die allgemeinen Schlüsse.

E) Für die unter B) und C) genannten Gesetze läßt sich von einem allgemeineren Gesichtspunkte eine Ableitung und

Deutung geben, welche das Verständnis der Vorgänge mit der Erzeugung der positiven Ladungen durch die negativen Elektronen in Zusammenhang bringt (p. 731—733). Die auf diesem Wege sich ergebenden Schlüsse veranlassen es, die Existenz von positiven Ladungen in Erwägung zu ziehen, welche *unabhängig von der Materie* bestehen (p. 733—736).

F) Aus den durch A) zusammengefaßten Tatsachen wird gefolgert (p. 725—727), daß in dem Untersuchungsgebiete die mittlere freie Weglänge der Elektronen bedeutend kleiner ist, als die bei derselben Gasdichte außerhalb der elektrischen Entladung in der positiven Lichtsäule beobachtete.

Die Hilfsmittel zu den Untersuchungen wurden zum großen Teile aus einem der *Härtelstiftung* entstammenden Fond angeschafft, welcher in äußerst dankenswerter Weise mir von der *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* für diesen Zweck überlassen wurde.

Die beschriebenen Versuche wurden im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Ich möchte es auch an dieser Stelle nicht unterlassen, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. O. Wiener für die Unterstützung der zum Teil große Hilfsmittel voraussetzenden Arbeiten meinen tiefempfundenen Dank auszusprechen. Auch Hrn. Prof. Dr. Th. Des Coudres bin ich für das den Untersuchungen entgegengebrachte Interesse zu großem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 15. März 1910.)

2. Zur Kenntnis der Glaselektrolyse; von A. Heydweiller und F. Kopfermann.

I. Einleitung.

Die Anfänge der vorliegenden Untersuchung gehen ziemlich weit zurück. Im Jahre 1902 wurden im physikalischen Institut zu Münster auf Veranlassung von Heydweiller Versuche unternommen auf elektrolytischem Wege Schwermetalle in Glas einzuführen, was bei den älteren Versuchen über Glaselektrolyse¹⁾ nicht gelungen war. Diese — nicht zum Abschluß gebrachten — Versuche zeigten, daß die Einführung von Silber leicht gelingt, wenn man anstatt der früher benutzten Amalgame geschmolzenes Silbernitrat als Elektrodenflüssigkeit verwendet.

Das eingeführte Silber zeigt die schönen Färbungen des kolloidalen Zustandes und zwar verschieden je nach der Temperatur, bei der die Elektrolyse erfolgte: gelb bei niedriger, rot bei höherer, während die blaue Färbung nicht zu erhalten war. Durch Erwärmen des gelb gefärbten Silberglases läßt sich die gelbe Modifikation in die rote überführen. Es schien danach eine Umwandlungstemperatur für den Übergang zu existieren, und eine Möglichkeit für deren Bestimmung vorzuliegen.

Ein weiteres Interesse boten die Versuche durch die Aussicht, etwas über die relativen Volumina und Beweglichkeiten verschiedener einzuführender Metallionen zu erfahren, nachdem die Beobachtungen von Warburg und Tegetmeier gezeigt hatten, daß im Glase zwar Natrium durch Lithium mit seinem kleineren Atomvolumen, nicht aber durch Kalium, mit seinem größeren, elektrolytisch ersetzt werden kann, und daß im ersteren Fall das Glas eine merklich poröse Struktur erhält.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 21. p. 622. 1884; F. Tegetmeier, Wied. Ann. 41. p. 18. 1890; W. C. Roberts-Austen, Engineering 55. p. 608. 630. 1891; 59. p. 742. 1895.

Die Fortführung der Versuche schien uns daher lohnend, und sie hatten, wenn sich auch die obigen Aussichten nur in beschränktem Maße verwirklichen ließen, doch manche bemerkenswerten Ergebnisse.

II. Versuchsanordnung.

Die Versuche wurden im Heraeusofen vorgenommen, der eine leichte Regulierung und Konstanthaltung der erforderlichen zwischen 200 und 500° C. liegenden Temperaturen über die längeren Versuchszeiten gestattet.

Das zu elektrolysierende Glas wurde in Form einer unten zugeschmolzenen Röhre von 1—2 mm Wandstärke in ein weiteres Reagenzglas eingesetzt, das als Anodenflüssigkeit geschmolzene Salze der einzuführenden Metalle, oder auch, wenn die reinen Salze sich vor dem Schmelzen zersetzten, Mischungen von solchen enthielt, während im Innern des „Elektrolytglases“ als Kathodenflüssigkeit meist die bei 230° schmelzende Mischung von KNO_3 und NaNO_3 verwendet wurde, ausnahmsweise wohl auch nur eines dieser Nitrate. Die elektrolytische Metalleinführung erfolgte also von außen nach innen. Zur Stromzu- und -ableitung dienten Drähte und Bleche aus Platin oder anderen Metallen.

Die Stromquelle bei der Elektrolyse lieferte die städtische Zentrale mit 220 Volt, die Stromstärken wurden mit einem Milliampèremeter von Siemens & Halske (Westentypus) gemessen; sie lagen zwischen 0,0005 und 0,25 Amp. Die Versuchsdauer schwankte zwischen einigen Minuten und mehreren Stunden.¹⁾

Die Einschaltung eines Widerstandes von etwa 1000 Ohm war notwendig, da nicht selten die Stromwirkung sich auf schwache Stellen des Elektrolytglases konzentriert und durch wechselseitige Verstärkung von Wärme- und elektrolytischer Wirkung zu einem schnellen Durchfressen des Glases und damit Kurzschluß in der Zersetzungszone führt.

1) Über Einzelheiten der Versuchsanordnung und der Versuche vgl. F. Kopfermann, Inaug.-Diss. Münster 1908.

III. Allgemeines über die Versuche.

Die meisten Versuche wurden ausgeführt mit zwei Glasarten von Franz Schilling in Gehlberg; dem gewöhnlichen leicht schmelzbaren Thüringer Na-Glas und einem schwer schmelzbaren K-Glas, und mit Salzen der Metalle Na, K, Ba, Sr, Sn, Pb, Cu, Fe, Co, Ag, sowie Au, U, Pt nur bei den letzten drei mit ganz negativem Erfolg.

Die Glaselektrolyse ist bekanntlich dadurch ausgezeichnet, daß die Stromleitung fast vollständig von den Kationen besorgt wird, da die Beweglichkeit der Silikatanionen gegen die der Kationen verschwindend klein ist. So ließ sich denn bei den vorliegenden, wie bei den angeführten früheren Versuchen ein mit Stromstärke und Stromdauer fortschreitendes Eindringen der eingeführten Kationen im Glase feststellen, daß in manchen Fällen — besonders beim Silber — sehr schön zu verfolgen ist, während die Einwirkung des Anions der Kathodenflüssigkeit auf das Glas sich auf eine leichte Korrosion der äußersten Oberflächenschicht beschränkt.

Vielfach ist das Eindringen der fremden Kationen in das Glas an auftretenden mehr oder weniger lebhaften Färbungen zu erkennen; auch das Eintreten der Glaskationen in die Kathodenflüssigkeit ist mit solchen verbunden, die durch Umkehren der Stromrichtung wieder rückgängig werden; es ist wahrscheinlich, daß diese Färbungen durch Kolloidbildungen im einen, wie im anderen Falle bedingt sind. Beim Glase bestätigte das die ultramikroskopische Untersuchung, wobei allerdings zu bemerken ist, daß das verwendete Glas auch *vor* der Elektrolyse sich unter dem Ultramikroskop nicht als optisch leer erwies; aber durch die Elektrolyse wurde die Zahl der Beugungszentren ganz bedeutend vermehrt.

Im allgemeinen änderte sich während der Elektrolyse die Stromstärke bei konstanter Spannung und Temperatur, und zwar vielfach recht erheblich. Die Ursache kann nur in Widerstandsänderungen des Elektrolytglases durch die Stromwirkung liegen, die je nach dem eingeführten Kation und auch je nach der Temperatur in Vermehrungen oder Verminderungen bestanden. Man muß schließen, daß die Beweglichkeit des ein-

geführten Kations gegenüber dem ersetzten im ersten Falle kleiner, im zweiten größer ist.

IV. Einzelheiten der Versuche.

1. Natrium aus NaNO_3 .

a) Natrium-Glas. Der Strom geht gleichmäßig durch, eine wahrnehmbare Änderung des Glases tritt nicht ein.

b) Kalium-Glas. Die Stromstärke steigt, in 20' etwa auf das 1,5fache, in 2 Stunden auf nahe das 10fache (bei 355°). Das Glas läßt keine merkliche Änderung erkennen. Bei ca. 385° tritt nach 20' langem Stromdurchgang (von 0,09—0,15 Amp.) Rotfärbung des KNO_3 — NaNO_3 an der Kathode auf, die bei Umkehrung des Stromes nach 5' wieder verschwindet.

2. Kalium aus KNO_3 .

a) Natrium-Glas. Bei über 400° wandert das Kalium hindurch; die Stromstärke schwankt; das Glas wird schwach violett gefärbt und entglast; es zerspringt beim Abkühlen in lauter kleine Fragmente.

b) Kalium-Glas. Der Strom geht glatt durch mit abnehmender Stärke in 60' auf $\frac{1}{5}$ bei 350° , auf $\frac{1}{10}$ bei 435° . Offenbar wird, wie im Falle 1. b) das Kalium, so hier das neben dem Kalium im Glase noch vorhandene Natrium durch die Elektrolyse allmählich ausgetrieben. Eine Veränderung des Glases ist nicht zu erkennen.

3. Barium aus $\text{Ba(NO}_3)_2$ gelöst in NaNO_3 .

a) Natrium-Glas. Daß in diesem, wie in anderen ähnlichen Fällen, in denen gemischte Anodenflüssigkeiten angewandt wurden, auch der gelöste Stoff, hier Ba, an der Elektrolyse beteiligt war, ließ sich aus dem gegen 1. a) abweichenden Verhalten erkennen.

Die Stromstärke wächst anfänglich etwas, um so mehr je tiefer die Temperatur ist (von 0,08—0,25 Amp. bei 330° , von 0,21—0,225 Amp. bei 450° in etwa 10 bis 15'), um dann unter Schwankungen nahe konstant zu bleiben. Das Glas wird an der Oberfläche blasig aufgetrieben und bröckelt ab, beim Erhitzen auch in tieferen Schichten. In der Anodenflüssigkeit treten weiße Flocken auf.

b) Kalium-Glas. Die Stromstärke verhält sich ebenso, wie beim Na-Glas; das Glas wird aber weit weniger angegriffen. Es wird nach längerem Stromdurchgang etwas matt und beim Erhitzen etwas blasig aufgetrieben.

4. Strontium aus $\text{Sr}(\text{NO}_3)_2$.

Natrium-Glas. Verhalten wie beim Barium.

5. Zinn aus SnCl_2 .

a) Natrium-Glas. Die Stromstärke sinkt bei allen zwischen 230° und 450° liegenden Versuchstemperaturen beträchtlich auf $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{40}$ des Anfangswertes, um dann ziemlich konstant zu bleiben. Das Glas wird grau, graubraun bis schwarz gefärbt, aber nicht gleichförmig, sondern an einzelnen Stellen stärker. Die äußere Oberfläche bleibt dabei glatt, wird aber von einem Netzwerk feiner Sprünge durchsetzt. Beim Erhitzen in der Bunsenflamme bläht sich das Glas auf und wird weißlich-undurchsichtig, auch an vorher wenig veränderten Stellen. Fuchsinlösung wird auch bei mehrtägigem Stehen von dem nicht durch Erhitzen veränderten Glase nicht aufgesaugt.

b) Kalium-Glas. Hier zeigt die Stromstärkeänderung je nach der Temperatur ein wechselndes Verhalten; bei 250° und 300° Abnahme bis auf $\frac{1}{40}$ in 60', bei 400° Zunahme bis auf das 8fache, in 10' dann geringere Abnahme. Das Glas wurde nicht gefärbt, zeigte aber beim Erhitzen ein ähnliches Verhalten wie das Natrium-Glas, nur weniger stark.

6. Blei aus $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ gelöst in KNO_3 — NaNO_3 .

a) Natrium-Glas. Die Stromstärke steigt in den ersten 5—10' auf das $1\frac{1}{2}$ —2fache, um dann bei tieferen Temperaturen (275° — 340°) wieder beträchtlich zu sinken, bei höheren Temperaturen (350° — 450°) dagegen ziemlich konstant zu bleiben, allerdings unter gelegentlichen starken Schwankungen. Das Eindringen des Bleies ist an der mit der Stromdauer fortschreitenden milchig weißen Färbung des Glases, bei übrigens glatt und glänzend bleibender Oberfläche, zu erkennen. Dabei wird das Glas ähnlich wie beim Einführen von Lithium nach Warburg und Tegetmeier porös, wie an dem Aufsaugen von Fuchsinlösung zu erkennen ist, die sich in Wasser auch wieder auslaugen läßt.

Bei mäßigem Erhitzen des Glases in der Bunsenflamme wird es dunkler und erhält Metallglanz, bei stärkerem Erhitzen wird die Oberfläche korrodiert und zerfällt in ein weißes Pulver, wahrscheinlich durch Bildung von Bleioxyd.

b) Kalium-Glas. Auch hier steigt regelmäßig die Stromstärke zu Anfang bis auf das 5—10fache; bei tieferen Temperaturen langsamer, bei höheren schneller, um bei hinreichend langer Stromdauer wieder zu sinken. Das Glas wird mitunter milchig, meist aber nur schwach gelblich gefärbt; diese Gelbfärbung nimmt beim vorsichtigen Erhitzen zu und geht beim stärkeren Erhitzen in Metallglanz über; manchmal wird die Oberfläche auch rauh. Die Erscheinungen sind hier weniger regelmäßig als beim Natrium-Glas.

7. Kupfer aus Cu_2Cl_2 .

a) Natrium-Glas. Die Stromstärke steigt meist etwas, aber unregelmäßig; bei hohen Temperaturen sinkt sie etwas. Das Kupfer dringt sehr ungleichmäßig in das Glas ein, das bei etwas längerer Stromdauer meist an einzelnen Stellen durchgefressen wird. Das Glas wird grünlich, beim Erhitzen erst bräunlich gefärbt und erhält dann metallischen Kupferglanz, der sich bei längerem Erhitzen wieder verliert; das vorher undurchsichtige Glas wird dann wieder durchsichtig und bläulich-grün gefärbt.

b) Kalium-Glas. Bei tieferen Temperaturen (unter 350°) nahm die Stromstärke zu, bei höheren ab. Das Glas war je nach der Temperatur verschieden gefärbt: bei tieferen schwächer rot bis rotbraun, bei höheren intensiv dunkelrot. Bei stärkerem Erhitzen schlägt die Farbe ins Grünliche bis Bräunliche um und schließlich bildet sich metallisches Kupfer, das sich bei länger dauerndem Erhitzen wieder mit bläulich-grüner Farbe aufzulösen scheint.

8. Eisen aus FeCl_2 gelöst in SnCl_2 .

a) Natrium-Glas. Bei tieferen Temperaturen (290° — 360°) sinkt die Stromstärke anfänglich etwas, um dann wieder zu steigen, bei höheren (390° — 420°) bleibt sie ziemlich konstant. Ähnlich wie beim Kupfer wird das Glas häufig sehr stark angegriffen und an einzelnen Stellen durchgefressen. Die Erscheinungen sind also wesentlich andere, als beim reinen SnCl_2 ,

und zeigen deutlich nicht nur, daß das Eisen an der Elektrolyse beteiligt ist, sondern auch, daß es leichter in das Natrium-Glas einwandert, als das Zinn.

b) Kalium-Glas. Hier unterschieden sich die Versuche nicht wesentlich von denen mit reinem SnCl_2 , so daß die Beteiligung des Eisens an der Elektrolyse zweifelhaft ist.

9. Kobalt aus $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$ gelöst in NaNO_3 .

Natrium-Glas. Nach einstündigem Stromdurchgang bei 280° — 320° war das Glas oberflächlich rötlich gefärbt; beim Überfahren mit einem Polierstahl erhielt das Glas Metallglanz; das Kobalt ist daher, wenn überhaupt, so jedenfalls nur sehr wenig tief eingedrungen.

10. Silber aus AgNO_3 gelöst in KNO_3 oder in KNO_3 — NaNO_3 . Diese Versuche wurden am eingehendsten durchgeführt und bieten auch wohl das größte Interesse.

a) Natrium-Glas. Die Stromstärke steigt bei allen Temperaturen, bei tieferen Temperaturen unter 350° sehr beträchtlich (bis auf das 100fache in 60 — $120'$), aber allmählich, bei höheren Temperaturen setzt sie gleich stärker ein und steigt nur noch wenig, vielleicht erfolgt der erste Anstieg hier so schnell, daß er sich nicht verfolgen läßt.

Bei Temperaturen bis 280° wird das Glas gelb gefärbt, bei höheren Temperaturen (über 290°) intensiv rot. Durch Erwärmen läßt sich die Gelbfärbung in die Rotfärbung überführen. Diese Überführung, die im Bunsenbrenner schnell vor sich geht, erfordert um so mehr Zeit, je tiefer die Temperatur liegt. Wie alle Reaktionen scheint auch die Umwandlung eine von der Temperatur sehr stark abhängige Geschwindigkeit zu besitzen.

Bei 300° war sie auch nach $45'$ noch nicht eingetreten; erst bei 320° wurde nach längerer Zeit die Färbung etwas tiefer. Bei 420° trat nach $1\frac{1}{2}$ Stunden völlige Rotfärbung auf. Wenn also die umgekehrte Umwandlung der roten in die gelbe Modifikation bei tieferen Temperaturen nicht beobachtet wurde, so kann das sehr wohl an der zu kleinen Reaktionsgeschwindigkeit liegen. Vielleicht ergibt sie sich, wenn man das rote Glas lange Zeit hindurch auf einer der Umwandlungstemperatur (280° — 290°) nahe gelegenen, aber etwas tieferen

Temperatur erhält. Längere starke Erhitzung auf etwa 500° verwandelt die rote Modifikation in metallisches Silber, das dem Glase einen schönen Glanz verleiht.

Ein dünnes Reagenzglas sprang nach dem Abkühlen spiralig und zeigte dabei eine starke Zunahme der Krümmung nach innen zu; das Silber war, wie immer, von außen her eingeführt. Dieser Versuch zeigt, daß bei gewöhnlicher Temperatur das Glas durch die Einführung des Silbers eine Volumenvermehrung erfahren hat.

b) Kalium-Glas. Die Stromstärke steigt auch hier, aber bedeutend weniger als beim Natrium-Glas, auf etwa das $2\frac{1}{2}$ -fache in 10 Minuten, um dann ziemlich konstant zu bleiben, bei Temperaturen zwischen 250° — 400° . Die Veränderung des Glases ist sehr gering, nur eine schwache Gelbfärbung ist zu bemerken. Fuchsinlösung dringt nicht ein. Aber die Beteiligung des Silber an der Elektrolyse tritt beim Erhitzen sofort hervor. Bei schwachem Erwärmen wird zunächst die Gelbfärbung intensiver, um bei stärkerem Erhitzen, wie beim Natrium-Glas in die intensive Rotfärbung und endlich in den Metallglanz überzugehen.

c) Jenenser Gerätegias. Ein Versuch mit einem Reagenzglas am Jenenser Gerätegias zeigte, daß das Silber in dieses nicht eindringt; nur an der Oberfläche war etwas metallisches Silber abgeschieden.

11. Die Versuche aus geschmolzenen oder gelösten Gold-, Platin- und Uransalzen die Metalle elektrolytisch in das Glas einzuführen, blieben ergebnislos, da die Salze sich bei den höheren Temperaturen meist zersetzten.

12. *Diffusionsversuche.* Es seien noch einige Beobachtungen angeführt, die in Bestätigung früherer Erfahrungen zeigen, daß auch durch Diffusion ohne den elektrischen Strom Metalle bei höheren Temperaturen in das Glas eintreten können. Eine derartige Beobachtung von Armand Gautier und Hélier vom Jahre 1896 erwähnt Dammer¹⁾; eine andere Beobachtung, wobei Natriumdampf beim Erhitzen die Wände des umschließenden Glasrohres intensiv rot gefärbt hatte, zeigte Hr. Dieterici gelegentlich dem einen von uns.

1) O. Dammer, Handbuch der anorganischen Chemie 4. p. 700.

Wir konnten diese Beobachtungen bestätigen, zugleich aber auch feststellen, daß dieses Einführen der Metalle durch Diffusion viel längere Zeit in Anspruch nimmt, als die elektrolytische Einführung. Durch geschmolzenes Silbersalz wird auch hier das Kalium-Glas schwach gelblich, das Natrium-Glas bei höherer Temperatur rot gefärbt, aber in 40' nur etwa in demselben Betrage, den man mit einem Strom von 0,18 Amp. bis 300° in 3' erzielt. Auch bei den durch Diffusion gefärbten Gläsern war durch starkes Erhitzen der Übergang in die metallische Modifikation zu erzielen.

Auch durch Kupfersalze werden, wie bei der Elektrolyse, nur in geringerem Grade, Natriumgläser grünlich-gelb, Kaliumgläser rot gefärbt.

Bei anderen Salzen sind solche Diffusionswirkungen von uns nicht beobachtet worden.

V. Zusammenfassung.

Aus diesen Versuchen läßt sich schließen, daß die Metalle bei ihrer Auflösung in Kieselsäure in mäßigen Temperaturen (250°—450°), ähnlich wie bei der in verflüssigtem Ammoniak,¹⁾ in den kolloidalen Zustand übergehen, aus dem sie bei starkem Erwärmen wieder in den metallischen zurückkehren, die unedleren Metalle werden dabei in Oxyde verwandelt.

Die Versuche mit verschiedenartigen Gläsern machen es wahrscheinlich, daß bei der Bildung der Kolloide auch die im Glase bereits vorhandenen Metalle beteiligt sind.

Eine große Anzahl von Metallen läßt sich durch Diffusion oder besser und schneller durch Elektrolyse aus den geschmolzenen Salzen bei Temperaturen oberhalb 200° in das Glas einführen. Bei Silber und Kupfer ist dabei das Auftreten mehrerer durch die Farbe unterschiedener kolloidaler Modifikationen festgestellt, deren Auftreten von der Temperatur der Einführung abhängig ist und deren eine sich durch Erwärmen in die andere überführen läßt. Für Silber in Natrium-Glas liegt der Umwandlungspunkt zwischen 280° und 290°. Die umgekehrte Umwandlung beim Abkühlen ist nicht beobachtet

1) Vgl. J. Bronn, Ann. d. Phys. 16. p. 166. 1905.

worden, was vielleicht an der zu kleinen Reaktionsgeschwindigkeit liegt.

Macht man die wahrscheinliche Annahme, daß bei Einführung eines neuen Kations in das Glas der Widerstand desselben größer oder kleiner wird, je nachdem seine Beweglichkeit kleiner ist oder größer, als die des von ihm verdrängten Kations, so ergibt sich aus den Versuchen die folgende Reihenfolge für die Beweglichkeit der Kationen im Glase bei den nebenstehenden Temperaturen

Na > K bei 300°—400°,	Cu > Na bei 350°,
Ba > Na „ 330°—450°,	Cu < K „ 350°—450°,
Sn < K „ 250°—300°,	Fe > Sn „ 290°—360°.
Na > Sn > K bei 400°,	Fe = Na „ 400°,
Pb > Na bei 350°—450°,	Ag > Na „ 230°—400°.

Wie man sieht, wechselt in einigen Fällen die Reihenfolge mit der Temperatur. Mehr als eine ungefähre Reihenfolge läßt sich vorderhand nicht aus den Versuchen entnehmen.

Rostock, im März 1910.

(Eingegangen 25. März 1910.)

3. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra; von A. Sommerfeld.

In dieser und einigen anschließenden Studien möchte ich darstellen, wie merkwürdig sich die elektrodynamischen Begriffe und Rechnungen vereinfachen, wenn man sich dabei von der tiefsinnigen Raum-Zeit-Auffassung Minkowskis leiten läßt. Dem so jäh verstorbenen Freunde würde das Nachstehende kaum etwas Neues bieten; als Erläuterung der Minkowskischen Ideen aber mag es manchem willkommen sein.

Den Inhalt des Relativitätsprinzips kann man nach Minkowski bekanntlich so formulieren: In den physikalischen Gleichungen dürfen nur *Raumzeitvektoren* auftreten, d. h. Größen, die in der vierfachen Mannigfaltigkeit von Raum und Zeit, der Minkowskischen „Welt“, Vektorcharakter besitzen, deren Komponenten sich daher beim Übergang von einem zu einem neuen Bezugssystem nach dem Schema der Koordinatentransformation für diese Mannigfaltigkeit („Lorentz-Transformation“) umsetzen. An die Stelle des absoluten Raumes der älteren Theorie tritt so die absolute Welt, d. h. die Verknüpfung von Raum und Zeit durch die Lichtgeschwindigkeit c , deren Unveränderlichkeit jetzt das absolute Substrat der Elektrodynamik ausmacht.

In diesem ersten Teil beschränke ich mich auf die algebraischen Beziehungen der Raumzeitvektoren. Ein zweiter Teil „Vektoranalysis“ soll die differentiellen Eigenschaften der vierdimensionalen Vektorfelder darstellen. Besonderen Wert habe ich darauf gelegt, die Definition und Transformation der Vektoren möglichst geometrisch zu fassen. Die hierzu erforderlichen Vorstellungen und Rechnungen, die auch einen vollen Ersatz für die von Minkowski benutzte Matrixrechnung liefern, sind (bei Zulassung imaginärer Koordinaten) unmittelbare Verallgemeinerungen des uns geläufigen dreidimensionalen Vektorverfahrens.

§ 1. Vierer- und Sechservektoren.

Im Raum von drei Dimensionen hat man bekanntlich zwei Arten von Vektoren zu unterscheiden, *Vektoren erster Art* oder polare Vektoren und *Vektoren zweiter Art* oder axiale Vektoren, auch Rotoren oder Plangrößen genannt. Ein Vektor erster Art ist eine mit Richtungssinn versehene gerade Strecke, seine Komponenten die senkrechten Projektionen auf die Koordinatenachsen. Ein Vektor zweiter Art ist eine mit Umlaufssinn versehene ebene Fläche, seine Komponenten die senkrechten Projektionen der Fläche auf die Koordinatenebenen. Die Komponenten des ersteren sind daher auf je eine, die des letzteren auf je zwei Achsen bezogen, erstere daher mit einem, letztere mit zwei Indizes zu schreiben. Zu den ersteren gehört in der Mechanik Kraft und Geschwindigkeit, zu den letzteren Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit. Z. B. wären die Komponenten einer Winkelgeschwindigkeit als ω_{yz} , ω_{zx} , ω_{xy} zu schreiben; erst nach Übergang zu der Graßmannschen „Ergänzung“, dem auf der Drehebene errichteten Lot, rechtfertigt sich die gewöhnliche Schreibweise ω_x , ω_y , ω_z . Derselben Klasse von Vektoren gehört auch, wie Wiechert hervorgehoben hat, die magnetische Feldstärke \mathfrak{H} an. Die übliche und auch im folgenden beibehaltene Schreibweise $\mathfrak{H}_x \dots$ sollte daher konsequenterweise durch $\mathfrak{H}_{yz} \dots$ ersetzt werden.

In dem Minkowskischen ¹⁾ Räume von vier Dimensionen sind die Vektoren erster Art vierkomponentig, „Vierervektoren“, diejenigen zweiter Art sechskomponentig, „Sechservektoren“. Es gibt auch Vektoren dritter Art, die wieder vierkomponentig werden.²⁾

1) Die beiden Arbeiten Minkowskis sind: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Göttinger Nachr. 1908. p. 1 oder Mathematische Ann. 68. p. 472. 1910, auch separatim bei B. G. Teubner demnächst erscheinend; *Raum und Zeit*, Physik. Zeitschr. 10. p. 104. 1909, sowie separatim bei B. G. Teubner, mit einem Bildnis Minkowskis.

2) Entsprechend der Anzahl der Koordinaten-Achsen, -Ebenen und -Räume, die sich durch die Anzahl der Kombinationen von vier Elementen zu je 1, 2 oder 3 berechnen, nämlich:

$$\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6, \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Ein Vierervektor ist z. B. der Fahrstrahl vom Anfangspunkte nach einem Raumzeitpunkte $(xyz l)$ mit den Komponenten

$$x, y, z, l = ict, i = \sqrt{-1};$$

l ist ebenso wie x, y, z eine Länge; die Bezeichnung erinnere an „Lichtweg“. Die Größe dieses Vektors, d. h. die Länge der zugehörigen vierdimensionalen Strecke ist

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + l^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}.$$

Zwei Vektoren $(x_1 y_1 z_1 l_1)$ und $(x_2 y_2 z_2 l_2)$ heißen zu einander senkrecht, wenn

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + l_1 l_2 = 0.$$

Der Koordinatenvektor $(xyz l)$ ist der Typus aller Vierervektoren. Ein Quadrupel von Größen verdient nur dann den Namen Vierervektor, wenn es sich bei einer Koordinatenänderung ebenso wie der Koordinatenvektor, d. h. kovariant mit ihm, transformiert. Die Länge eines jeden Vierervektors verhält sich hierbei invariant; sie ist seine einzige Invariante. Speziell für den Koordinatenvektor drückt die Invarianz seiner Länge das Prinzip von der konstanten Fortpflanzung des Lichtes aus. Wegen des imaginären Charakters seiner vierten Komponente kann übrigens die Länge eines Vierervektors Null sein, ohne daß er selbst und seine Komponenten verschwindet.

Ein Vektor erster Art ist ferner die „Viererdichte P “, welche den Begriff der Geschwindigkeit v und der Dichte ρ einer bewegten Ladung zusammenfaßt, mit den Komponenten:

$$(1) \quad P_x = \rho \frac{v_x}{c}, \quad P_y = \rho \frac{v_y}{c}, \quad P_z = \rho \frac{v_z}{c}, \quad P_t = i\rho;$$

seine Länge wird

$$(1a) \quad |P| = i\rho \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \text{wo} \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Der Vektorcharakter von P ergibt sich folgendermaßen: Man betrachte die Weltlinie eines Ladungselementes de , d. h. die aufeinanderfolgenden raum-zeitlichen Lagen desselben in der $xyz l$ -Mannigfaltigkeit. Das Weltlinienelement zwischen zwei benachbarten Punkten 1 und 2

$$dx, dy, dz, dl$$

ist sicher ein mit dem Koordinatenvektor kovarianter Vierervektor. Sodann ziehen wir das wichtige Prinzip der

Unabhängigkeit der Ladung vom Bezugssystem heran, durch welches die elektrische Masse grundsätzlich vor der materiellen Masse ausgezeichnet ist. Das Prinzip ist natürlich im Einklang mit den Maxwell'schen Gleichungen und von Einstein als Folge derselben erwähnt. Hiernach ist:

$$de = \varrho dS = \varrho' dS';$$

$dS = dx dy dz$ bedeutet das dreidimensionale Raumelement, ebenso dS' dasselbe in einem neuen „gestrichenen“ Bezugssystem, das durch eine bloße Drehung um 0 aus dem ursprünglichen hervorgeht. In Fig. 1 erscheinen dS und dS' als zwei beliebige Querschnitte durch die Weltlinienröhre, welche der Begrenzung von de entspricht. Legt man solche Querschnittspaare je durch die Punkte 1 und 2, so schneidet man zwei gleiche vierdimensionale Raumelemente $d\Sigma$ aus:

$$d\Sigma = dS dl = dS' dl';$$

hier sind dl , dl' die Höhen der beiden Raumelemente $d\Sigma$ und zugleich die Komponenten des Weltlinienelementes 12 nach den Achsen l , l' , die als vierte Achsen unseres ungestrichenen und gestrichenen Bezugssystems senkrecht auf dS und dS' stehen müssen.¹⁾ Durch Division der beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich, daß

$$\frac{e}{dl} = \frac{e'}{dl'} = \frac{de}{d\Sigma}$$

eine vom Bezugssystem unabhängige, skalare Größe ist. Multiplizieren wir also den Vierervektor (dx, dy, dz, dl) mit $i\varrho/dl$, so behält er seinen

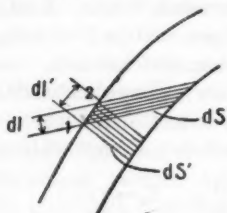


Fig. 1.

Vektorcharakter; dabei entsteht genau der Vierervektor P aus Gleichung (1).

Zu den Raumzeitvektoren zweiter Art übergehend, betrachten wir im Raum von vier Dimensionen ein Ebenenstück

1) Ich halte es für erlaubt, Zeichnung und Ausdruck so einzurichten, als ob l reell und das Senkrechtstehen ein Euklidisches wäre. In Wirklichkeit ist ja ein imaginäres l und ein nichteuklidisches Senkrechtstehen gemeint, welches man mit Minkowski an einer Hyperbel bzw. einem Hyperboloid konstruieren kann. Es ist möglich, aber kaum zu empfehlen, alles folgende dementsprechend nichteuklidisch umzudeuten.

von bestimmter Größe und Stellung, wobei es uns nur auf den Flächeninhalt, nicht auf die Form, nur auf die Orientierung, nicht auf die absolute Lage ankommt; die Lage kann durch Parallelverlagerung, die Form durch inhaltsgleiche Umformung beliebig abgeändert werden. Dieses geometrische Bild ist aber noch zu speziell; es hat nur fünf unabhängige Bestimmungsstücke, indem seine Größe durch eine, seine Lage durch vier ¹⁾ Zahlen gegeben wird. Beachten wir aber, daß zu einer Ebene im Raum von vier Dimensionen auch die dazu senkrechte Ebene (die Gesamtheit aller derjenigen Geraden, die auf allen Geraden der ersten Ebene senkrecht stehen) eindeutig ²⁾ bestimmt ist. In dieser Normalebene denke man sich jetzt ein zweites Ebenenstück von bestimmter Größe gegeben. *Der Inbegriff zweier solcher zueinander normaler Ebenenstücke ist das geometrische Bild eines Vektors zweiter Art.* Er hängt von sechs Bestimmungsstücken ab, indem zu den fünf genannten des einen noch die Größe des dazu normalen Ebenenstückes als sechstes Bestimmungsstück hinzutritt. Wir sprechen daher von einem *Sechservektor*. Als seine sechs rechtwinkligen Komponenten in einem $xyzl$ -Koordinatensystem bezeichnen wir die Summe der senkrechten Projektionen der beiden Flächenstücke auf je eine der sechs Koordinatenebenen $xy, yz, \dots zl$; die Komponenten eines Sechservektors sind daher je mit zwei Indizes zu schreiben,

1) Man kann sich die Lage des Ebenenstückes durch zwei von einem beliebigen Punkte desselben ausgehenden und beliebig in ihm gelegene Vierervektoren gegeben denken, deren Lage zunächst durch je drei Größen, etwa die Verhältnisse ihrer vier Komponenten, bestimmt wird. Jeder der beiden Vierervektoren kann aber beliebig innerhalb der Ebene gedreht werden. Dadurch kann man je einem ihrer drei Bestimmungsstücke einen beliebigen Wert geben. Es bleiben also nur $2(3-1) = 4$ Bestimmungsstücke für die Lage der Ebene übrig.

2) Man denke sich etwa in der ersten Ebene zwei Gerade gezogen und konstruiere die Gesamtheit der zu ihnen senkrechten Geraden, die je einen linearen Raum erfüllen. Diese beiden Räume schneiden sich in einer Ebene, welche alle gemeinsamen Senkrechten der beiden Ausgangsgeraden enthält und daher die Normalebene der ersten Ebene ist.

Die beiden zueinander senkrechten Ebenen haben, ebenso wie irgend zwei Ebenen von allgemeiner Lage, nur einen Punkt gemeinsam. Denn jede Ebene ist im Raum von vier Dimensionen durch zwei lineare Gleichungen gegeben und vier lineare Gleichungen bestimmen eindeutig einen Punkt.

die voneinander verschieden sein müssen und auf deren Reihenfolge es ankommt.¹⁾

Den *speziellen Raumzeitvektor zweiter Art*, das einfache Ebenenstück, kann man kinematisch einer *einfachen Drehung*, den *allgemeinen Sechservektor*, das Ebenenpaar, einer *allgemeinen Drehung* oder *Schraubung* zuordnen. Man beachte nämlich, daß in vier Dimensionen die einfachste Drehungsoperation die sämtlichen Punkte einer Ebene ungeändert läßt, daß man also nicht von einer Drehungsachse, sondern von einer Drehungsebene zu sprechen hat; diese Drehungsebene ist dann durch die Ebene unseres Flächenstückes, die Drehungsgröße durch die Größe desselben gegeben. Ebenso wie sich in drei Dimensionen eine Schraubung²⁾ aus einer gewissen Drehung und einer Translation nach der Achse dieser Drehung, d. h. einer Drehung um die dazu senkrechte, unendlich ferne Achse zusammensetzt, entsteht die allgemeine Drehung in vier Dimensionen aus der Zusammensetzung zweier einfacher Drehungen um zwei zueinander normale Ebenen, entsprechend dem Aufbau unseres allgemeinen Sechservektors aus zwei normalen Flächenstücken. Durch diese Bemerkung möge die Bezeichnung „Schraubung“ für die allgemeine Drehung gerechtfertigt werden.

Ein Vektor zweiter Art ist z. B. der *Sechservektor f des elektromagnetischen Feldes* mit den Komponenten:

$$(2) \quad \begin{cases} f_{yz} = \mathfrak{S}_x, & f_{zx} = \mathfrak{S}_y, & f_{xy} = \mathfrak{S}_z, \\ f_{xi} = -i\mathfrak{E}_x, & f_{yi} = -i\mathfrak{E}_y, & f_{zi} = -i\mathfrak{E}_z. \end{cases}$$

Der Bedeutung des Sechservektors und der Beziehung seiner Komponenten auf zwei in gewisser Reihenfolge zu nehmenden Koordinatenachsen entspricht dabei die allgemeine Festsetzung:

$$(2a) \quad f_{ik} = -f_{ki}, \quad f_{ii} = 0 \quad (i, k = x, y, z, l).$$

Daß die elektrische und magnetische Kraft \mathfrak{E} und \mathfrak{S} bei Minkowski zu der höheren Einheit des Sechservektors f zu-

1) Vertauschung von xy mit yx bedeutet Projektion auf die Rückseite der xy -Ebene und daher ebenso wie bei drei Dimensionen, Vorzeichenumkehr. Vgl. hierzu die Formel (3).

2) Auf diese Analogie weist auch Minkowski hin: Raum und Zeit § V.

sammengefaßt wird, ist für die Relativtheorie charakteristisch, in der je nach dem Bezugssystem dasselbe Feld als rein elektrisch oder als elektromagnetisch erscheinen kann. Z. B. zeigt eine gleichförmig bewegte Ladung dem mitbewegten Beobachter nur die „elektrische Seite“ des Sechservektors, dem an der Bewegung nicht teilnehmenden Beobachter auch seine „magnetische Seite“.

Daß in der Tat das elektromagnetische Feld als Sechservektor aufzufassen ist, d. h. daß sich seine Komponenten bei einer Änderung des Bezugssystems nach dem Typus des vierdimensionalen Ebenenstückes bzw. Ebenenpaares transformieren, folgt daraus, daß durch die Maxwell'schen Gleichungen das Feld mit der Viererdichte P durch eine Divergenzbeziehung (vgl. später) verknüpft ist.

Zur näheren Kenntnis des Sechservektors betrachten wir den speziellen Fall eines einzelnen Flächenstückes φ vom Inhalte 1 und geben ihm die Form eines etwa vom Nullpunkte auslaufenden Parallelogramms. Die beiden Seiten desselben seien die Vierervektoren u, v . Dann ist die Projektion dieses Flächenstückes auf die xy -Ebene bestimmt durch die Projektionen $u_x u_y v_x v_y$ der Vierervektoren, nämlich

$$(3) \quad \varphi_{xy} = u_x v_y - v_x u_y.$$

Zwischen den so gebildeten sechs Komponenten dieses speziellen Sechservektors, von denen nach der Abzählung auf p. 753 nur fünf voneinander unabhängig sind, besteht die Identität:

$$(3a) \quad \varphi_{yz} \varphi_{xl} + \varphi_{zx} \varphi_{yl} + \varphi_{xy} \varphi_{zl} = 0,$$

wie unmittelbar durch Multiplikation der betreffenden Determinanten bewiesen wird. Ferner ist¹⁾ als Inhalt $|\varphi|$ des Flächenstückes die Quadratwurzel aus der Quadratsumme seiner sechs Komponenten zu definieren. In unserem Falle gilt also

$$(3b) \quad |\varphi|^2 = \varphi_{yz}^2 + \varphi_{zx}^2 + \varphi_{xy}^2 + \varphi_{xl}^2 + \varphi_{yl}^2 + \varphi_{zl}^2 = 1.$$

1) Sein Quadrat ist zunächst gegeben durch die Formel der gewöhnlichen Planimetrie:

$$|u|^2 |v|^2 \sin^2(u, v) = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2(u, v)) = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2,$$

vgl. § 3 A, woraus Gleichung (3b) unmittelbar durch geeignete Zusammenfassung der Komponenten folgt.

Wir betrachten andererseits das zu φ normale Flächenelement φ^* vom Inhalt 1, das wir auch als die „Ergänzung“ jenes bezeichnen können und behaupten, daß seine Komponenten lauten

$$3c) \quad \varphi_{yz}^* = \varphi_{xl}, \quad \varphi_{zx}^* = \varphi_{yl}, \quad \varphi_{xy}^* = \varphi_{zl}, \quad \varphi_{xi}^* = \varphi_{yz} \dots$$

oder allgemein, wenn wir durch Einklammerung die nicht vertretenen Indizes andeuten,

$$(3d) \quad \varphi_{ik}^* = \varphi_{(ik)},$$

wobei hinsichtlich der Reihenfolge der Indizes ik (ik) festzusetzen ist, daß sie aus der Reihenfolge $xyz l$ durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen hervorgehen soll.

Zum Beweise stellen wir φ^* wieder durch zwei Vierervektoren $u^* v^*$ dar, welche einzeln auf uv senkrecht stehen. Dies besagt (vgl. die obige Definition des Senkrechtstehens) das Bestehen der folgenden Gleichungen:

$$u_x^* u_x + u_y^* u_y + u_z^* u_z + u_l^* u_l = 0,$$

$$u_x^* v_x + u_y^* v_y + u_z^* v_z + u_l^* v_l = 0,$$

$$v_x^* u_x + v_y^* u_y + v_z^* u_z + v_l^* u_l = 0,$$

$$v_x^* v_x + v_y^* v_y + v_z^* v_z + v_l^* v_l = 0.$$

Indem man sie bzw. mit v_l, u_l, v_l, u_l multipliziert und die zweite von der ersten, die vierte von der dritten subtrahiert, erhält man:

$$u_x^* \varphi_{xl} + u_y^* \varphi_{yl} + u_z^* \varphi_{zl} = 0,$$

$$v_x^* \varphi_{xl} + v_y^* \varphi_{yl} + v_z^* \varphi_{zl} = 0.$$

Multipliziert man ferner diese beiden Gleichungen bzw. mit $v_z^* u_z^*$ oder mit $v_y^* u_y^*$ und subtrahiert sie voneinander, so folgt

$$\varphi_{xz}^* \varphi_{xl} + \varphi_{yz}^* \varphi_{yl} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{xy}^* \varphi_{xl} + \varphi_{zy}^* \varphi_{zl} = 0.$$

Wegen $\varphi_{xz}^* = -\varphi_{zx}^*$ kann man hierfür die Proportion schreiben:

$$\varphi_{yz}^* : \varphi_{xy}^* : \varphi_{zx}^* = \varphi_{xl} : \varphi_{yl} : \varphi_{zl}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich

$$\varphi_{yz} : \varphi_{xy} : \varphi_{zx} = \varphi_{xl}^* : \varphi_{yl}^* : \varphi_{zl}^*.$$

und daher, wenn λ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$\varphi_{ik}^* = \lambda \varphi_{(ik)}.$$

Da nun aber φ^* ebenso wie φ den Flächeninhalt 1 haben soll, so wird $\lambda^2 = 1$, entsprechend unserer obigen Behauptung (3d).

Die Identität (3a) können wir jetzt mit Benutzung der Bezeichnungen von § 3 A auch so schreiben:

$$(3e) \quad \begin{cases} (\varphi \varphi^*) = \varphi_{yz} \varphi_{yz}^* + \varphi_{xy} \varphi_{xy}^* + \dots + \varphi_{zi} \varphi_{zi}^* \\ \quad = 2(\varphi_{yz} \varphi_{xi} + \varphi_{zx} \varphi_{yl} + \varphi_{xy} \varphi_{zi}) = 0. \end{cases}$$

Ein allgemeiner Sechservektor f entsteht jetzt aus den beiden speziellen φ und φ^* in der Form

$$(4) \quad f = \varrho \varphi + \varrho^* \varphi^*;$$

ϱ und ϱ^* sind die Inhalte der beiden zueinander senkrechten Flächenstücke von der Orientierung φ und φ^* , aus denen sich f zusammensetzt. Zu f bilden wir den „dualen Vektor f^* , seine „Ergänzung“ durch Vertauschung der Flächen ϱ und ϱ^* . Es sei nämlich im Anschluß an (4) f^* definiert durch:

$$(4a) \quad f^* = \varrho^* \varphi + \varrho \varphi^*.$$

Hieraus folgt z. B. für die yz -Komponenten dieses dualen Vektors

$$(4b) \quad f_{yz}^* = \varrho^* \varphi_{yz} + \varrho \varphi_{yz}^* = \varrho^* \varphi_{xi}^* + \varrho \varphi_{xi} = f_{xi},$$

ebenso

$$(4b) \quad f_{zx}^* = f_{yl}, \quad f_{xy}^* = f_{zi}, \quad f_{xi}^* = f_{yz}, \quad f_{yl}^* = f_{zx}, \quad f_{zi}^* = f_{xy}$$

und allgemein

$$(4c) \quad f_{ik}^* = f_{(ik)}, \quad f_{ki}^* = -f_{ik}^*, \quad f_{ii}^* = 0,$$

so daß f und f^* in demselben Zusammenhang stehen, wie das spezielle Flächenstück φ mit dem dazu normalen φ^* .

Durch ϱ und ϱ^* drücken sich auch die nach dem Vorbilde von (3 b, e) gebildeten Größen $|f|^2$ und (ff^*) aus:

$$(5a) \quad \begin{cases} |f|^2 = f_{yz}^2 + f_{zx}^2 + \dots + f_{zi}^2 \\ \quad = \varrho^2 |\varphi|^2 + \varrho^{*2} |\varphi^*|^2 + 2 \varrho \varrho^* (\varphi \varphi^*) = \varrho^2 + \varrho^{*2}, \end{cases}$$

$$(5b) \quad \begin{cases} (ff^*) = f_{yz} f_{yz}^* + f_{xy} f_{xy}^* + \dots + f_{zi} f_{zi}^* \\ \quad = \varrho^2 (\varphi \varphi^*) + \varrho^{*2} (\varphi^* \varphi) + \varrho \varrho^* (|\varphi|^2 + |\varphi^*|^2) = 2 \varrho \varrho^*. \end{cases}$$

Beide sind als *Invarianten* des Sechservektors zu bezeichnen, da sie ebenso wie die Flächen ϱ und ϱ^* eine von der Lage des Koordinatensystems unabhängige geometrische Bedeutung haben. Man kann etwa $|f|$ als (geometrische) Flächensumme, (ff^*) als (doppeltes) Flächenprodukt bezeichnen. Im Falle

f die elektromagnetische Kraft bedeutet, haben wir nach (2) und (5a, b)

$$(5c) \quad |f|^2 = \mathfrak{S}^2 - \mathfrak{E}^2 = 2L, \quad (ff^*) = -2i(\mathfrak{E}\mathfrak{S}).$$

Die Bezeichnung L bedeutet „Lagrangesche Funktion der Volumeneinheit“.

Man kann aber außer von den Komponenten eines Sechservektors nach den Koordinatenebenen auch sprechen von seinen Komponenten nach den Koordinatenräumen und Koordinatenachsen.

Unter der Komponente nach einem Koordinatenraum ist zu verstehen ein in diesem Raum gelegenes Flächenstück, das man erhält, wenn man die beiden Flächenstücke ϱ und ϱ^* auf diesen Raum projiziert und die geometrische Summe ihrer beiden Projektionen bildet. Z. B. ist die Komponente von f nach dem Raum der xyz der dreidimensionale Vektor zweiter Art:

$$(f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}) = \mathfrak{S}.$$

Unter der Komponente nach einer Koordinatenachse¹⁾ ist zu verstehen ein dieser Achse paralleles Flächenstück, das man erhält, wenn man von den Flächenstücken ϱ und ϱ^* ihre Komponenten nach dem zu dieser Achse senkrechten Raum abspaltet und die beiden übrig bleibenden Flächenstücke geometrisch zusammensetzt. Indem man die resultierende Fläche mit dem zur Achse normalen Raum zum Schnitt bringt, entsteht ein dreidimensionaler Vektor erster Art in diesem Raume. Z. B. wird die Komponente von f nach der Achse l der dreidimensionale Vektor erster Art:

$$(6) \quad f_l = (f_{lx}, f_{ly}, f_{lz}) = i\mathfrak{E},$$

der sich auch als spezieller Vierervektor von verschwindender l -Komponente auffassen läßt. Allgemein sei f_j der zur j -Achse senkrechte Vierervektor:

$$(6a) \quad f_j = (f_{jx}, f_{jy}, f_{jz}, f_{jl}).$$

Die entsprechende Bedeutung hat die Komponente der Ergänzung f^* nach der j -Achse:

$$(6b) \quad f_j^* = (f_{jx}^*, f_{jy}^*, f_{jz}^*, f_{jl}^*)$$

1) Dieser zunächst etwas komplizierte Begriff scheint mir für die geometrische Deutung der späteren differentiellen Vektoroperationen unentbehrlich.

und im besonderen

$$(6c) \quad f_i^* = (f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}, 0) = \S.$$

Im vierdimensionalen Raum gibt es außer den Vektoren erster und zweiter Art auch solche dritter Art, die wieder Vierervektoren sind, aber nicht durch eine Strecke, sondern durch ein dreidimensionales Raumstück gegeben werden und deren Komponenten mit drei Indices zu schreiben wären, als Projektionen des Raumstücks auf die vier Koordinatenräume, z. B.

$$\mathfrak{A}_{yzl}, \mathfrak{A}_{zlx}, \mathfrak{A}_{lxy}, \mathfrak{A}_{xyz}.$$

Geometrisch kann man einem solchen Vektor dritter Art in eindeutiger Weise einen Vektor erster Art, seine „Ergänzung“, zuordnen, nämlich die auf dem Raumstücke senkrechte Strecke, deren Länge gleich der Größe des Raumstückes ist. Die Komponenten des letzteren,

$$\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z, \mathfrak{A}_t,$$

sind der Reihe nach den Komponenten des Vektors dritter Art gleich. Diese Ersetzbarkeit des Vektors dritter Art durch seine Ergänzung reicht hier sogar noch weiter, wie bei drei Dimensionen die Zuordnung der Ergänzung zu dem Vektor zweiter Art, insofern als hier die Ergänzung wegen der geraden Dimensionenzahl das Verhalten des Vektors dritter Art nicht nur bei Koordinatentransformationen von der Determinante + 1, sondern auch bei solchen von der Determinante - 1 (Spiegelung, Inversion) richtig wiedergibt. Als zusammenfassende Bezeichnung für die Vektoren erster und dritter Art empfiehlt sich der Name „Vierervektor“.

Da man irgend zwei Raumstücke durch vektorielle Addition ihrer Ergänzungen geometrisch zusammensetzen kann, erhält man durch ein Raumpaar keinen allgemeineren Vektor dritter Art wie durch ein einzelnes Raumstück. In der Tat hat letzteres schon vier voneinander unabhängige Bestimmungsstücke, seine Größe und die drei zur Definition seiner Lage erforderlichen Daten.

Ein wichtiges Beispiel für die Vektoren dritter Art werden wir (vgl. § 3 B und § 4) in der elektrodynamischen Kraft (Pf) kennen lernen.

§ 2. Komponentenbildungen nach beliebigen Richtungen und Ebenen und ihr Zusammenhang mit der Lorentz-Transformation.

Charakteristisch für den Vektorbegriff und seine Unabhängigkeit vom Koordinatensystem ist es, daß wir von seinen Komponenten nach beliebigen Richtungen (beim Sechservektor Ebenen) sprechen können. Unter der Komponente eines Vierervektors P nach der Achse x' haben wir zu verstehen die senkrechte Projektion auf diese Achse, d. i.

$$(7) \quad P_{x'} = P_x \cos(x'x) + P_y \cos(x'y) + P_z \cos(x'z) + P_l \cos(x'l).$$

Ist x' eine „raumartige“ Achse, so wird¹⁾ $\cos(x', x)$, $\cos(x', y)$, $\cos(x', z)$ reell, $\cos(x'l)$ rein imaginär, so daß (vgl. (1) und (7)) $P_{x'}$ reell wird. Dagegen ist $P_{l'}$ rein imaginär, wenn l' eine „zeitartige“ Achse ist.

Unter der Komponente eines Sechservektors f nach einer beliebigen Ebene, die wir uns durch zwei in ihr enthaltene zueinander senkrechte Richtungen $x'y'$ gegeben denken, ist zu verstehen die Summe der senkrechten Projektionen der den Vektor f bildenden Flächenstücke auf diese Ebene; sie berechnet sich aus den zweireihigen Determinanten der Richtungskosinus zu:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{x'y'} = f_{xy} \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'y) \\ \cos(y'x) & \cos(y'y) \end{vmatrix} + f_{yz} \begin{vmatrix} \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ \cos(y'y) & \cos(y'z) \end{vmatrix} \\ \quad + f_{zx} \begin{vmatrix} \cos(x'z) & \cos(x'x) \\ \cos(y'z) & \cos(y'x) \end{vmatrix} + f_{xl} \begin{vmatrix} \cos(x'x) & \cos(x'l) \\ \cos(y'x) & \cos(y'l) \end{vmatrix} \\ \quad + f_{yl} \begin{vmatrix} \cos(x'y) & \cos(x'l) \\ \cos(y'y) & \cos(y'l) \end{vmatrix} + f_{zl} \begin{vmatrix} \cos(x'z) & \cos(x'l) \\ \cos(y'z) & \cos(y'l) \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

Zum Beweise betrachten wir zunächst den speziellen Sechservektor φ (reines Flächenstück von der Größe 1) und

1) Sind x_1, y_1, z_1, l_1 die Koordinaten irgend eines Punktes auf der Achse x' im System der xyz und setzt man $R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + l_1^2$, so wird nach der allgemeinen Definition von § 3 A:

$$\cos(x'x) = \frac{x_1}{R_1}, \quad \cos(x'y) = \frac{y_1}{R_1}, \quad \cos(x'z) = \frac{z_1}{R_1}, \quad \cos(x'l) = \frac{l_1}{R_1}.$$

Die Achse heißt raumartig, wenn $R_1^2 > 0$, d. h. $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 > |l_1|^2$, zeitartig, wenn $R_1^2 < 0$. Im ersten Fall sind die drei ersten Kosinus reell, der letzte imaginär, im zweiten Fall die drei ersten imaginär, der letzte reell.

stellen dieses wie in § 1 in der Form eines Parallelogramms durch zwei Vierervektoren u, v dar. Dann bestimmt sich das auf die $x'y'$ -Ebene projizierte Flächenstück, d. h. die gesuchte Komponente $\varphi_{x'y'}$, aus den Projektionen der Vierervektoren u_x, u_y, v_x, v_y auf die x' - und y' -Achse wie in Gleichung (3) zu:

$$\varphi_{x'y'} = u_x v_y - v_x u_y.$$

Setzen wir hier für u_x, \dots die Werte aus (7) ein und schreiben nach (3) für die Unterdeterminanten $u_x v_y - u_y v_x \dots$ bzw. $\varphi_{xy} \dots$, so ergibt sich genau die Gleichung (8) für den speziellen Fall $f = \varphi$. Dieselbe Gleichung entsteht ebenso für das zu φ normale Flächenstück φ^* und daher auch für die Summe $\varphi\varphi + \varphi^*\varphi^*$, welche nach Gleichung (4) den allgemeinen Sechservektor bedeutet. Die Komponentenregel (8) für den Sechservektor ist also eine notwendige Folge derjenigen für den Vierervektor (7).

Bezüglich der Realitätsverhältnisse gilt ähnliches wie bei den Komponenten des Vierervektors: $f_{x'y'}$ besteht aus lauter reellen, $f_{x'l'}$ aus lauter rein imaginären Termen, wenn die Achsen x', y' raumartig, l' zeitartig sind.

Wir betrachten ferner das aus dem Sechservektor f abgeleitete Quadrupel von Vierervektoren f_j (Gleichung (6)) und fragen, wie sich die Komponente f_x von f nach der neuen Achse x' (die also ein zu x' paralleles Flächenstück bzw. einen zu dieser Achse senkrechten Vierervektor bedeutet) aus den Komponenten f_x, f_y, f_z, f_t nach den ursprünglichen Achsen ausdrückt. In der Tat muß ja durch Angabe von f_x, f_y, f_z, f_t auch f_x mitgegeben sein. Wir behaupten, daß folgender Zusammenhang besteht:

$$(9) \quad f_{x'} = f_x \cos(x'x) + f_y \cos(x'y) + f_z \cos(x'z) + f_t \cos(x'l).$$

Gleichung (9) stimmt formal mit (7) überein, unterscheidet sich aber wesentlich dadurch, daß auf der rechten Seite von (9) vier gerichtete Vierervektoren, auf der von (7) vier ungerichtete Komponenten stehen. Gleichung (9) ist natürlich auf Grund der Vektoreigenschaft von f , Gleichung (8), zu beweisen. Wir bezeichnen die in (9) vorkommende Vektorsumme mit Σ :

$$\Sigma = f_x \cos(x'x) + f_y \cos(x'y) + f_z \cos(x'z) + f_t \cos(x'l)$$

und bilden ihre Komponenten nach den Achsen $xyz l$ nach Gleichung (6a):

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= f_{yx} \cos(x'y) + f_{zx} \cos(x'z) + f_{lx} \cos(x'l), \\ \Sigma_y &= f_{xy} \cos(x'y) + f_{zy} \cos(x'z) + f_{ly} \cos(x'l), \\ \Sigma_z &= f_{xz} \cos(x'y) + f_{yz} \cos(x'z) + f_{lz} \cos(x'l), \\ \Sigma_l &= f_{xl} \cos(x'y) + f_{yl} \cos(x'z) + f_{zl} \cos(x'l).\end{aligned}$$

Multiplizieren wir hier, unter j' zunächst eine beliebige Achse verstanden, der Reihe nach mit $\cos(j'x)$, $\cos(j'y)$, $\cos(j'z)$, $\cos(j'l)$ und addieren, so entsteht nach (7) die Komponente von Σ nach dieser Achse j' und zwar ergibt sich

für $j' = x'$ die Summe 0,

für $j' = y'$ der Ausdruck (8),

für $j' = z'$ derselbe Ausdruck bei Vertauschung von y' mit einer zu x' senkrechten neuen Richtung z' usw.

Die rechte Seite von (9) stellt also in der Tat das Quadrupel derjenigen Größen dar, die wir nach Gleichung (6) mit $f_{x'}$ zu bezeichnen haben, nämlich das Quadrupel

$$(0 \quad f_{x'y'} \quad f_{x'z'} \quad f_{x'l'}).$$

Der Vollständigkeit halber sei auch das Verhalten eines Vektors dritter Art bei der Projektion auf einen beliebigen Raum $x'y'z'$ erwähnt. Seine Komponente nach dem Raum $x'y'z'$ würde sich durch einen viergliedrigen Ausdruck berechnen, in dem die dreireihigen Unterdeterminanten der Richtungskosinusse als Koeffizienten auftreten, für die man aber auch nach den zwischen ihnen bestehenden Orthogonalitätsbedingungen die Richtungskosinus der gemeinsamen Senkrechten l' setzen kann. Der Vierervektor dritter Art projiziert sich daher ebenso wie der Vierervektor erster Art, der seine Ergänzung bildet.

Wir überzeugen uns nun, daß die hier entwickelten Projektions- oder Komponentenformeln identisch sind mit den Transformationsformeln der Relativtheorie. Zu dem Zweck betrachten wir, wie üblich, den Sonderfall, daß das neue Bezugssystem der $x'y'z'l'$ in den beiden mittleren Achsen mit dem ursprünglichen der $xyz l$ übereinstimmt, so daß jenes aus diesem durch eine Drehung in der xl -Ebene (um die yz -Ebene)

hervorgeht (Drehwinkel φ); und zwar sei die x' -Achse eine raumartige, also die l' -Achse eine zeitartige. Dann ist

$$(10) \quad \begin{cases} \cos(x'x) = \cos(l'l) = \cos \varphi, \\ \cos(x'l) = -\cos(l'x) = \sin \varphi, \\ \cos(y'y) = \cos(z'z) = 1, \\ \cos(y'x) = \dots = 0. \end{cases}$$

Wenden wir also die Komponentenformel (7) auf den Koordinatenvektor $(xyzl)$ an, so ergibt sich

$$(10a) \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + l \sin \varphi, & y' = y, \\ l' = -x \sin \varphi + l \cos \varphi, & z' = z. \end{cases}$$

Nun ist $\cos \varphi > 1$, da nach der Anmerkung auf p. 760 $\cos \varphi = x_1 / \sqrt{x_1^2 + l_1^2}$ und $l_1^2 < 0$ ist, also φ , $\sin \varphi$ und $\operatorname{tg} \varphi$ rein imaginär, sowie $|\operatorname{tg} \varphi| < 1$. Man hat daher, wenn β einen echten Bruch bedeutet:

$$(10b) \quad \operatorname{tg} \varphi = i\beta, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Daraufhin werden die Gleichungen (10a) mit der Lorentz-Einsteinschen Transformation identisch und zeigen, daß $v = \beta c$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit der sich im Raum der xyz das neue Achsensystem gegen das ursprüngliche gleichförmig in der x -Richtung verschiebt.

Zugleich zeigt Gleichung (8), wie sich dabei der Sechservektor des Feldes transformiert (oder „projiziert“). Wir haben nach (8) und (10):

$$\begin{aligned} f_{x'y'} &= f_{xy} \cos \varphi - f_{yl} \sin \varphi, & f_{z'x'} &= f_{zx} \cos \varphi + f_{zl} \sin \varphi, \\ f_{y'z'} &= f_{yz}, & f_{z'l'} &= f_{zl}, \\ f_{y'l'} &= f_{yl} \cos \varphi + f_{xy} \sin \varphi, & f_{z'i'} &= f_{zi} \cos \varphi - f_{xx} \sin \varphi, \end{aligned}$$

oder wegen (10b) und (2):

$$(10c) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_{x'} = \mathfrak{H}_x, & \mathfrak{H}_{y'} = \frac{\mathfrak{H}_y + \beta \mathfrak{E}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \mathfrak{H}_{z'} = \frac{\mathfrak{H}_z - \beta \mathfrak{E}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathfrak{E}_{x'} = \mathfrak{E}_x, & \mathfrak{E}_{y'} = \frac{\mathfrak{E}_y - \beta \mathfrak{H}_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & \mathfrak{E}_{z'} = \frac{\mathfrak{E}_z + \beta \mathfrak{H}_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Hiernach erscheinen also auch diese wohlbekannten Transformationsformeln des Feldes als unmittelbarer Ausfluß aus

unserer geometrischen Auffassung des Sechservektors und seiner aus der Projektion vierdimensionaler Strecken abgeleiteten Komponentenbildung. Von den Maxwellschen Gleichungen, aus denen diese Formeln bei Lorentz und Einstein abgeleitet werden, war dabei überhaupt nicht die Rede (außer insofern, als wir unter Hinweis auf jene Gleichungen f als Sechservektor ansprachen). Überhaupt stellt sich ja bei Einstein und Minkowski das Relativitätsprinzip als ein der Elektrodynamik übergeordnetes Prinzip dar.

§ 3. Produkte von Vierer- und Sechservektoren.

A. Skalare Produkte.

Zwei Vierervektoren P und Φ werden *skalar* multipliziert nach der Regel

$$(P\Phi) = P_x \Phi_x + P_y \Phi_y + P_z \Phi_z + P_t \Phi_t.$$

Bedeutet z. B. P die Viererdichte, Φ das Viererpotential (Zusammenfassung von skalarem und Vektorpotential, vgl. später), so wird $(P\Phi)$ das „elektrokinetische Potential“ von Schwarzschild. Das Quadrat der Länge eines Vierervektors ist gleich dem skalaren Produkt mit sich selbst, z. B. $|P|^2 = (PP)$ vgl. (1a).

Bei beliebiger Bedeutung von P und Φ definiert die aus der gewöhnlichen Vektorrechnung übertragene Formel

$$(P\Phi) = |P||\Phi| \cos(P, \Phi)$$

den Richtungskosinus zweier beliebiger Richtungen; sie wurde in diesem Sinne bereits am Anfang des § 2, Anm. benutzt. Die Definition des Senkrechtstehens vom Anfange des § 1 bildet einen speziellen Fall davon.

Auch zwei Sechservektoren f und F können *skalar* multipliziert werden nach der Regel

$$(fF) = f_{xy} F_{xy} + f_{yz} F_{yz} + \dots f_{zt} F_{zt}.$$

Unter diese Regel fallen die beiden Invarianten des Sechservektors f , vgl. (5a, b)

$$|f|^2 = (ff) \quad \text{und} \quad (ff^{*2}).$$

B. Vektorielle Produkte.

Zwei Vierervektoren u, v werden *vektoriell* multipliziert nach einer Regel, die dem gewöhnlichen dreidimensionalen Vektor-

produkt analog ist. So wie dort aus zwei Vektoren erster Art ein Vektor zweiter Art entsteht, so ergibt sich hier aus zwei Vierervektoren ein *Sechservektor*, und zwar ein spezieller Sechservektor q (einfaches Flächenstück) mit der Invariante $(qq^*) = 0$. Die schon in § 1 benutzte Multiplikationsregel lautet

$$q_{xy} = u_x v_y - u_y v_x, \dots$$

q bedeutet nach Größe und Lage das aus u und v gebildete *Parallelogramm*.

Man kann auch einen *Vierervektor* und einen *Sechservektor* *vektoriell*, nämlich zu einem *Vierervektor dritter Art* vereinigen. Ist der Sechservektor speziell ein einfaches Flächenstück, so bedeutet der Vektor dritter Art direkt das aus dem Vierervektor und der Ergänzung dieses Flächenstücks gebildete räumliche *Parallelepiped*. Im allgemeinen Falle wird er als geometrische Summe zweier solcher Parallelepipede konstruiert, kann aber immer (vgl. den Schluß von § 1) durch einen Vierervektor erster Art ersetzt werden. Der Sachverhalt ist derselbe wie in der gewöhnlichen Vektorrechnung, wo durch vektorielle Multiplikation eines Vektors erster und zweiter Art ein Vektor erster Art entsteht. Das formale Schema dieser Multiplikation entnehmen wir eben diesem dreidimensionalen Falle.

Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z)$ der Vektor erster Art und $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_{yz}, \mathfrak{B}_{zx}, \mathfrak{B}_{xy})$ der Vektor zweiter Art. Aus letzterem bilden wir drei spezielle Vektoren erster Art, nämlich

$$\mathfrak{B}_x = (\mathfrak{B}_{xx}, \mathfrak{B}_{xy}, \mathfrak{B}_{xz}),$$

$$\mathfrak{B}_y = (\mathfrak{B}_{yx}, \mathfrak{B}_{yy}, \mathfrak{B}_{yz}), \quad (\mathfrak{B}_{ik} = -\mathfrak{B}_{ki}, \mathfrak{B}_{ii} = 0)$$

$$\mathfrak{B}_z = (\mathfrak{B}_{zx}, \mathfrak{B}_{zy}, \mathfrak{B}_{zz}),$$

allgemein \mathfrak{B}_j , deren jeder wegen $\mathfrak{B}_{jj} = 0$ senkrecht zur j -Achse steht. Sie können ebenso wie in § 1, Gleichung (6a) auch als Komponenten des Flächenstückes \mathfrak{B} nach der j -Achse bezeichnet werden und bedeuten ursprünglich Flächenstücke, die dieser Achse parallel sind. Als j -Komponente des Vektorproduktes von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ist nun zu definieren das skalare Produkt der beiden Vektoren erster Art \mathfrak{A} und \mathfrak{B}_j , nämlich

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}_j) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_{jx} + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_{jy} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{jz}.$$

Dies stimmt mit der gewöhnlichen Regel des Vektorproduktes überein und liefert z. B. für $j = x$:

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B}_x) = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_{xy} - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{zx}.$$

Dementsprechend definieren wir im vierdimensionalen Falle das Produkt (Pf) aus einem beliebigen Vierervektor P und Sechservektor f durch seine vier Komponenten für $j = x, y, z, l$ mittels der Formel:

$$(11) \quad (Pf_j) = P_x f_{jx} + P_y f_{jy} + P_z f_{jz} + P_l f_{jl}.$$

Jede dieser Komponenten wird also gewonnen durch skalare Multiplikation des Vierervektors P mit dem zur j -Achse senkrechten in (6a) definierten und aus f abgeleiteten speziellen Vierervektor f_j . Im nächsten Paragraphen betrachten wir als wichtigstes Beispiel hierzu die elektrodynamische Kraft \mathfrak{f} . Hier möge zunächst die schon genannte geometrische Bedeutung dieses Vektors dritter Art begründet werden, in dem speziellen Falle, wo $f = \varphi$ ein einfaches Flächenstück darstellt.

Wir ersetzen φ als Parallelogramm durch zwei Vierervektoren u, v und gehen zu dem dualen Flächenstück φ^* über, das aus zwei zu u, v senkrechten Vierervektoren u^*, v^* gebildet wird. Die Komponenten von $(P\varphi)$ erweisen sich dann gleich den vier dreireihigen Unterdeterminanten D_x, D_y, D_z, D_l des Schemas

$$(11a) \quad \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z & P_l \\ u_x^* & u_y^* & u_z^* & u_l^* \\ v_x^* & v_y^* & v_z^* & v_l^* \end{vmatrix}.$$

Bei Fortlassung der ersten Kolonne entsteht nämlich:

$$\begin{aligned} D_x &= P_y (u_z^* v_l^* - u_l^* v_z^*) + P_z (u_l^* v_y^* - u_y^* v_l^*) \\ &\quad + P_l (u_y^* v_z^* - u_z^* v_y^*) = P_y \varphi_{zl}^* + P_z \varphi_{ly}^* + P_l \varphi_{yz}^*. \end{aligned}$$

Hierfür kann man nach (5a) schreiben:

$$D_x = P_y \varphi_{xy} + P_z \varphi_{xz} + P_l \varphi_{xl},$$

was mit unserer Definition (11) von $(P\varphi_x)$ übereinstimmt.

D_x bedeutet nach bekannten Formeln der Raumgeometrie ein in dem yzl -Raum gelegenes Parallelpipet, gebildet aus den Vektoren (P_y, P_z, P_l) , (u_y^*, u_z^*, u_l^*) , (v_y^*, v_z^*, v_l^*) , d. h. aus den Projektionen der Vierervektoren P, u^*, v^* auf den yzl -Raum; D_x ist also zugleich die Projektion des aus diesen Vierervektoren gebildeten, im vierdimensionalen Raum gelegenen

Parallelopipeds auf den Koordinatenraum der yzl . D_x, D_y, D_z, D_l stellen also nach der Definition vom Ende des § 1 in der Tat die Komponenten eines Vektors dritter Art dar. Indem wir diese Komponenten mit D_x, \dots statt ausführlicher mit $D_{yzi} \dots$ bezeichneten, haben wir bereits den Übergang von dem Raumstück zu seiner Ergänzung, der auf dem Raumstück senkrechten Strecke, gemacht. Daß die als Vektor erster Art aufgefaßte Größe (D_x, D_y, D_z, D_l) auf dem aus den Vektoren P, u^*, v^* gebildeten Parallelpipeds senkrecht steht, erkennt man direkt. Man hat nur das obige 3×4 reihige Determinantenschema durch Hinzufügung der vier Komponenten von P oder u^* oder v^* zu einer verschwindenden vierreihigen Determinante zu ergänzen und erhält so

$$(11b) \quad (PD) = (u^*D) = (v^*D) = 0.$$

Handelt es sich um das Produkt aus P mit einem allgemeinen Sechservektor $f = \varrho \varphi + \varrho^* \varphi^*$, so betrachte man in gleicher Weise die beiden Parallelpipede D und D^* , welche bzw. aus den Vektoren P, u^*, v^* und P, u, v gebildet werden. Dann stellt $(Pf) = \varrho D + \varrho^* D^*$ die geometrische Summe dieser beiden Raumstücke dar, die man sich aus den zu jenen Raumstücken senkrechten Ergänzungen als Resultierende der beiden Strecken ϱD und $\varrho^* D^*$ hergestellt denken kann.

C. Tensorprodukte.

Ein Vektor zweiter Art liefert, vollständig mit sich selbst multipliziert, einen Tensor. Wir erläutern die Bildungsweise zunächst im dreidimensionalen Falle.

Sei \mathfrak{B} ein dreidimensionaler Vektor zweiter Art mit den Komponenten $\mathfrak{B}_{yz}, \mathfrak{B}_{zx}, \mathfrak{B}_{xy}$ und $\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_h$ irgend zwei der aus ihm abgeleiteten drei speziellen Vektoren erster Art (vgl. p. 765), so sei allgemein für $j, h = x, y, z$

$$T_{jh} = (\mathfrak{B}_j \mathfrak{B}_h) = \mathfrak{B}_{jz} \mathfrak{B}_{hz} + \mathfrak{B}_{jy} \mathfrak{B}_{hy} + \mathfrak{B}_{jx} \mathfrak{B}_{hx}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$T_{jh} = T_{hj}, \quad T_{jj} \neq 0.$$

Die so definierte dreidimensionale Tensorgröße ist sechskomponentig und unterscheidet sich von unserem vierdimensionalen Sechservektor, für den $f_{ik} = -f_{ki}$, $f_{ii} = 0$ gilt, grund-

sätzlich. Geometrisch deutet man die sechs Komponenten von T bekanntlich am besten als Koeffizienten der Gleichung einer Fläche zweiten Grades.

Im vierdimensionalen Falle gehen wir entsprechend von einem Sechservektor f aus und definieren einen Tensor (ff) durch die sämtlichen möglichen skalaren Produkte der nach Gleichung (6a) aus f abgeleiteten speziellen Vierervektoren f_j, f_h für $h, j = x, y, z, l$. Daraus entstehen zunächst 16 Tensor-komponenten

$$(f_j f_h) = f_{jx} f_{hx} + f_{jy} f_{hy} + f_{jz} f_{hz} + f_{jl} f_{hl},$$

die sich aber wegen $(f_j f_h) = (f_h f_j)$ auf 10 reduzieren. Die Ausrechnung liefert, wenn $f = (\mathfrak{H}, -i\mathfrak{E})$ im besonderen den Feldvektor bedeutet, für $j = h$:

$$(f_x f_x) = \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2,$$

$$(f_y f_y) = \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_y^2,$$

$$(f_z f_z) = \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2,$$

$$(f_l f_l) = -\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2$$

und für $j \neq h$

$$(f_x f_y) = (f_y f_x) = -(\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y),$$

$$(f_y f_z) = (f_z f_y) = -(\mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z),$$

$$(f_z f_x) = (f_x f_z) = -(\mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x),$$

$$(f_x f_l) = (f_l f_x) = i(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y),$$

$$(f_y f_l) = (f_l f_y) = i(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z),$$

$$(f_z f_l) = (f_l f_z) = i(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x).$$

Daneben betrachten wir den aus dem dualen Sechservektor $f^* = (-i\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$ gebildeten Tensor $(f^* f^*)$, dessen Komponenten aus den vorstehenden durch Vertauschung von \mathfrak{H} mit $-i\mathfrak{E}$ und \mathfrak{E} mit $+i\mathfrak{H}$ entstehen, z. B.

$$(f_x^* f_x^*) = -\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2,$$

$$(f_x^* f_y^*) = (f_y^* f_x^*) = +(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y),$$

$$(f_x^* f_l^*) = (f_l^* f_x^*) = i(\mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y)$$

und gehen schließlich zu dem aus beiden sich zusammensetzenden Tensor¹⁾

$$(12) \quad T = \frac{1}{2} ((f, f) - (f^* f^*))$$

1) Nach einem freundlichen Vorschlag von Hrn. Kollegen M. Laue.

über, mit den Komponenten:

$$(12a) \quad \begin{cases} T_{xx} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ T_{yy} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ T_{zz} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2), \\ T_{ll} = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2); \end{cases}$$

$$(12b) \quad \begin{cases} T_{xy} = T_{yx} = -(\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y), \\ T_{yz} = T_{zx} = -(\mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z), \\ T_{zx} = T_{xx} = -(\mathfrak{H}_z \mathfrak{H}_x + \mathfrak{E}_z \mathfrak{E}_x); \end{cases}$$

$$(12c) \quad \begin{cases} T_{xl} = T_{lx} = i(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y), \\ T_{yl} = T_{ly} = i(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z), \\ T_{zl} = T_{lz} = i(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x). \end{cases}$$

Wie man sieht, sind die Komponenten T_{ik} mit den obigen Komponenten $(f_i f_k)$ identisch; die Komponenten (T_{ij}) , die von $(f_i f_j)$ verschieden sind, genügen der Relation $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll} = 0$. Die drei Komponenten (12c) sind, nach Multiplikation mit $-ic$ gleich den Komponenten des Poyntingschen Energieflusses, die ersten drei Komponenten (12a) und die drei Komponenten (12b) stellen die Maxwellschen Spannungen dar, während die vierte Komponente (12a) die negativ genommene Energiedichte ist.

Auch jetzt deutet man die 16 Tensorkomponenten am besten als Koeffizienten in der Gleichung eines im vierdimensionalen Raum gelegenen dreidimensionalen „Raumes zweiten Grades“.

Die hier besprochenen Produktbildungen fallen sämtlich unter das von Minkowski benutzte Matrixschema. Zweifellos bietet dieses in mathematischer Hinsicht den Vorteil größtmöglicher Allgemeinheit und Einfachheit. Im Vorangehenden sollte gerade umgekehrt versucht werden, die besondere geometrische Bedeutung der einzelnen Produkte im Anschluß an die gewöhnliche Vektorrechnung hervorzukehren.

Alle diese Produkte sind ihrer geometrischen Bedeutung nach von der Wahl des Bezugssystems unabhängig, und zwar in folgendem Sinne: Die unter A. betrachteten skalaren Produkte sind reine Invarianten der Lorentztransformation. Die unter B. besprochenen Vektorprodukte transformieren sich kovariant

wie ein Sechser- bzw. ein Vierervektor; ihre Komponenten im neuen Bezugssystem hängen also nach den Formeln des § 2 mit denen im alten Bezugssystem zusammen.

Für das Vektorprodukt (Pf) rechnet man dies unmittelbar aus Gleichung (9) nach. Multipliziert man nämlich hier die links und rechts stehenden Vierervektoren skalar mit dem Vierervektor P , so entsteht

$$(Pf_x) = (Pf_x) \cos(x'x) + (Pf_y) \cos(x'y) \\ + (Pf_z) \cos(x'z) + (Pf_l) \cos(x'l),$$

d. h. diejenige Formel, welche nach § 2, Gleichung (7), die x' -Komponente eines Vierervektors durch die alten Komponenten ausdrückt. (Pf) ist also ein richtiger Vierervektor und (Pf_x) seine Projektion auf die x' -Richtung.

Zugleich berechnen sich auch die neuen aus den alten Tensorkomponenten nach dem einfachen Schema der Tensortransformation, dessen Koeffizienten quadratisch aus den Richtungskosinussen der neuen gegen die alten Koordinatenachsen gebildet werden.

§ 4. Die elektrodynamische Kraft \mathfrak{F} .

Die im vorigen Paragraph unter (11) besprochene kovariante Bildung (Pf) aus der Viererdichte P und dem Feldvektor f beansprucht ein besonderes Interesse. Ihre formale Ausrechnung ergibt:

$$\mathfrak{F}_x = (Pf_x) = \varrho \left(\frac{v_x}{c} f_{xx} + \frac{v_y}{c} f_{xy} + \frac{v_z}{c} f_{xz} + i f_{xl} \right) \\ = \varrho \left(\frac{v_x}{c} \mathfrak{F}_x - \frac{v_z}{c} \mathfrak{F}_y + \mathfrak{E}_x \right)$$

und ähnlich für die y, z -Komponente; dagegen für die l -Komponente:

$$\mathfrak{F}_l = (Pf_l) = \varrho \left(\frac{v_x}{c} f_{lx} + \frac{v_y}{c} f_{ly} + \frac{v_z}{c} f_{lz} + i f_{ll} \right) \\ = \frac{i\varrho}{c} (v_x \mathfrak{E}_x + v_y \mathfrak{E}_y + v_z \mathfrak{E}_z).$$

In der Bezeichnung der gewöhnlichen dreidimensionalen Vektorrechnung finden wir also für $j = x, y, z$ bzw. l :

$$(13) \quad \mathfrak{F}_j = \varrho \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{F}] \right), \quad \mathfrak{F}_l = \frac{i\varrho}{c} (\mathfrak{E} v).$$

\mathfrak{F}_j stellt also die j -Komponente der auf die Volumeinheit wirkenden elektrodynamischen Kraft, \mathfrak{F}_i die mit i/c multiplizierte an der bewegten Ladung pro Volumen- und Zeiteinheit geleistete elektrische Arbeit dar. Letztere heiße die *energetische*, erstere die *dynamischen* Komponenten.

Zerlegt man $f = \varrho \varphi + \varrho^* \varphi^*$ in zwei einfache Flchstcke, so zerlegt sich $\mathfrak{F} = \varrho D + \varrho^* D^*$, wie im vorigen Paragraph besprochen, in zwei einfache Raumstücke, deren Ergänzungen auf der Viererdichte P senkrecht stehen. Da letztere (vgl. den Anfang des § 1) die Richtung des Weltlinienelementes der Ladung hat (ihre Komponenten waren proportional mit dx, dy, dz, dl), so steht auch die Kraft \mathfrak{F} auf der Weltlinie ihres Angriffspunktes senkrecht. Die entsprechende Forderung hat man auf eine beliebige Kraft zu erweitern, solange man dissipative Vorgänge wie die Erzeugung Joulescher Wärme usw. ausschließt.

Die vierte energetische Komponente von \mathfrak{F} hat keineswegs, wie es zunächst scheinen könnte, nur eine formale Bedeutung. Vielmehr rangiert bei einem Wechsel des Bezugssystems ein Teil derselben direkt unter die wirklichen dynamischen Komponenten. Handelt es sich z. B. wie in den Gleichungen (10a) um ein Bezugssystem $x' y' z' t'$, welches durch eine Drehung in der xl -Ebene aus dem ursprünglichen hervorgeht, so wird

$$(14) \quad \mathfrak{F}_{x'} = \mathfrak{F}_x \cos \varphi + \mathfrak{F}_l \sin \varphi \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_{x'} \cos \varphi - \mathfrak{F}_l' \sin \varphi.$$

Die energetischen Zusatzglieder $\mathfrak{F}_l \sin \varphi$ (bzw. $-\mathfrak{F}_l' \sin \varphi$) sind klein von der Ordnung $1/c^2$, da sowohl \mathfrak{F}_l (bzw. \mathfrak{F}_l') wie $\sin \varphi$ den Faktor $1/c$ enthalten. Trotzdem sind diese Zusatzglieder für die Durchführung des Relativittsprinzipes unentbehrlich, wie später an dem Beispiel des einfachen Coulombschen Gesetzes erläutert werden soll.

Kennt man die dynamischen Komponenten \mathfrak{F}_x und \mathfrak{F}_x' irgend einer Kraft \mathfrak{F} in zwei relativ zueinander bewegten Systemen, z. B. auf Grund hinreichend genauer Messungen, so kann man durch ihren Vergleich nach den vorstehenden Formeln die energetischen Komponenten \mathfrak{F}_l und \mathfrak{F}_l' bestimmen. Umgekehrt können wir sagen: Eine Kraft (z. B. auch die Gravitation) ist erst dann physikalisch vollständig bekannt, d. h. im Sinne des Relativittsprinzipes für ein beliebiges Bezugssystem angebbar, wenn auch ihre energetische Komponente \mathfrak{F}_l bekannt ist.

Wenn wir das gestrichene System speziell als „mitbewegtes“ wählen, so also, daß der Angriffspunkt der Kraft \mathfrak{F} in diesem Bezugssystem ruht, so wird $dx' = dy' = dz' = 0$ und auch $\mathfrak{F}_t' = 0$, weil ja die Kraft auf der Weltlinie ihres Angriffspunktes senkrecht steht. Nur in diesem Falle verschwindet die energetische Komponente aus den Formeln zur Bestimmung von $\mathfrak{F}_x \dots \mathfrak{F}_t$, die also einfach lauten (x -Richtung = Richtung der Relativbewegung):

$$(14a) \quad \mathfrak{F}_x = \cos \varphi \mathfrak{F}_x', \quad \mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_y', \quad \mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}_z', \quad \mathfrak{F}_t = -\sin \varphi \mathfrak{F}_x'.$$

Dies die typischen Transformationsformeln für den Übergang von dem „mitbewegten“ zu einem „ruhenden System“, gültig für jeden Vektor erster (oder dritter) Art, insbesondere für die auf die Volumeinheit bezogene elektrodynamische Kraft. Wir nehmen an, daß sich ebenso wie diese *jede* „spezifische“, d. h. *pro Volumeinheit gerechnete Kraft als Vektor erster Art verhält*.

Anders die Gesamtkraft \mathfrak{R} bez. \mathfrak{R}' im ruhenden oder mitbewegten System, deren erstere wegen ihrer Beziehung zu einem willkürlichen Koordinatensystem in der Relativtheorie eigentlich keinen Platz hat. Durch die spezifische Kraft ist sie so zu definieren:

$$(15) \quad \mathfrak{R} = \int \mathfrak{F} dS, \quad \mathfrak{R}' = \int \mathfrak{F}' dS',$$

wenn $dS = dx dy dz$ das dreidimensionale Volumelement im ruhenden, $dS' = dx' dy' dz'$ dasjenige im mitbewegten System bedeutet. Letzteres ist von ersterem verschieden, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Bezugssysteme. Durch das Hinzutreten von dS, dS' wird daher der Vektorcharakter der rechten Seiten gestört. *Die Gesamtkraft verhält sich nicht einfach wie ein Vektor erster Art.*

Aus Fig. 1 folgt

$$(15a) \quad dS' = dS \cos \varphi = \frac{dS}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ist nämlich, wie wir jetzt voraussetzten, das gestrichene System mit seiner l' -Achse nach der Weltlinie des Angriffspunktes von \mathfrak{F} orientiert, so steht der $x'y'z'$ -Raum und dessen Volumelement dS' senkrecht auf dieser Weltlinie und es ist dS' die senkrechte Projektion von dS auf diesen Raum. Der Projektionswinkel ist gleich dem Winkel der beiden in Betracht

kommenden Normalen l' und l , also gleich φ . Der Umstand, daß φ imaginär ist, bringt es mit sich, daß die Projektion dS' größer ist als das projizierte Element dS , entgegen unserer Zeichnung in Fig. 1, die mit einem reellen φ operiert. Das Verhältnis $dS/dS' = \sqrt{1 - \beta^2}$ ist die bekannte Lorentz-Kontraktion.

Aus (15), (15a) und (14a) folgt jetzt unmittelbar:

$$\mathfrak{R}_x = \int \mathfrak{F}_x dS = \cos \varphi \int \mathfrak{F}_x dS = \int \mathfrak{F}_x dS' = \mathfrak{R}_{x'},$$

$$\mathfrak{R}_y = \int \mathfrak{F}_y dS = \int \mathfrak{F}_y dS = \frac{1}{\cos \varphi} \int \mathfrak{F}_y dS' = \frac{1}{\cos \varphi} \mathfrak{R}_{y'} \text{ usw.}$$

und zusammenfassend:

$$(14b) \quad \mathfrak{R}_x = \mathfrak{R}_{x'}, \quad \mathfrak{R}_y = \frac{1}{\cos \varphi} \mathfrak{R}_{y'}, \quad \mathfrak{R}_z = \frac{1}{\cos \varphi} \mathfrak{R}_{z'}, \quad \mathfrak{R}_t = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \mathfrak{R}_{x'}.$$

Diese Formeln (14b), verglichen mit (14a), belegen die obige Angabe, daß sich \mathfrak{R} nicht wie ein Vektor verhält. Bezeichnen wir nämlich, in formaler Analogie zu unserer Vektorbezeichnung, mit $|\mathfrak{R}|^2$ bzw. $|\mathfrak{R}'|^2$ die Quadratsumme der ungestrichenen bzw. gestrichenen Komponenten (wobei \mathfrak{R}'_t nach der Definitionsgleichung (15) gleich Null ist), so wird wegen (14b) $|\mathfrak{R}|$ nicht gleich $|\mathfrak{R}'|$, sondern

$$|\mathfrak{R}| = \frac{|\mathfrak{R}'|}{\cos \varphi} = |\mathfrak{R}'| \sqrt{1 - \beta^2},$$

während aus (14a), wie es für einen Vierervektor sein muß, natürlich $|\mathfrak{F}| = |\mathfrak{F}'|$ folgt.

Wir betrachten noch speziell den Fall eines im gestrichenen System wirkenden Normaldruckes, d. h. einer Kraftverteilung, die an einer im gestrichenen System ruhenden Fläche σ' angreifend, dort zu einem in die Normale n' fallenden pro Flächeneinheit gemessenen Drucke p' Anlaß gibt. Wir können diesen Fall entweder als eine Verteilung unendlich kleiner Gesamtkräfte \mathfrak{R} oder unendlich großer spezifischer Kräfte \mathfrak{F} ansehen, nach dem einen oder anderen der folgenden beiden Schemata

$$\mathfrak{R}_{n'} = p' d\sigma' \quad \text{oder} \quad p' = \mathfrak{F}_{n'} dn'.$$

Den ersten Standpunkt nimmt Einstein¹⁾ ein. Der letztere

1) A. Einstein, Jahrbuch f. Radioakt. 4. p. 448.

dürfte wegen des übersichtlicheren vektoriellen Verhaltens von \mathfrak{F} vorzuziehen sein. Von diesem Standpunkte aus denken wir uns \mathfrak{F} über eine der Fläche σ' anliegende Schicht von der Dicke dn' verteilt, ähnlich wie man eine Oberflächenladung als Grenze einer räumlichen Verteilung auffaßt.

Errichten wir auf dieser dreidimensionalen im $x'y'z'$ -Raum gelegenen Schicht $\sigma' dn'$ einen vierdimensionalen Zylinder parallel der l -Achse, so umfaßt dieser die Gesamtheit aller Weltlinien der Schichtpunkte. Die Kraft \mathfrak{F} , die im $x'y'z'$ -Raume senkrecht auf σ' stehen sollte, fällt zugleich in die Normale dieses vierdimensionalen Zylinders, da sie auch senkrecht zu der Weltlinie ihres Angriffspunktes ist. Legt man nun irgend einen geneigten Schnitt als xyz -Raum durch den Zylinder, so schneidet dieser aus dem Zylinder dasjenige Bild σdn der Schicht aus, das einem im $xyzl$ -System befindlichen Beobachter erscheint. In Fig. 2 ist als Zeichenebene die (nach p. 753, Anm. 2 vollkommen bestimmte) durch den betrachteten Punkt von σ zu legende Normalebene zur Tangentialebene von σ gewählt. Dieselbe enthält nicht nur die Normale n von σ im xyz -Raum, sondern auch die Zylindernormale n' sowie die l -Achse, da alle drei Richtungen auf σ senkrecht stehen. In die n' -Richtung fällt die Richtung des Vektors \mathfrak{F} ; wir haben nach Richtung und Größe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{n'}$. Für das Bezugssystem $xyzl$ zerlegt er sich in zwei Komponenten, die beide in der Figur ersichtlich sind: die energetische Komponente \mathfrak{F}_l und die dynamische \mathfrak{F}_n .

Eine Komponente von \mathfrak{F} senkrecht zur Zeichenebene in der Tangentialebene von σ dagegen gibt es nicht, d. h.

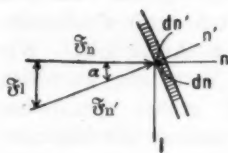


Fig. 2.

auch im ungestrichenen System steht (nach Abtrennung ihrer energetischen Komponente) die Kraft \mathfrak{F} und der ihr entsprechende Druck p senkrecht auf ihrer Angriffsfläche σ . Bezüglich der Größe von p folgt jetzt unmittelbar aus der Figur: Sei α der Winkel zwischen n und n' (wobei α zwischen 0 und φ liegen wird, und

diese äußersten Werte dann annimmt, wenn n' im besonderen senkrecht oder parallel zur Richtung der Relativbewegung des

gestrichenen und ungestrichenen Systems liegt). Dann gilt offenbar

also $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n' \cos \alpha$ und zugleich $dn' = dn \cos \alpha$

$$\mathfrak{F}_n dn = \mathfrak{F}_n' dn' \quad \text{oder} \quad p = p'.$$

Denn der ungestrichene Beobachter definiert seinen Druck p aus der dynamischen Komponente \mathfrak{F}_n von \mathfrak{F} und der von ihm gesehenen Schichtdicke dn durch $\mathfrak{F}_n dn$ gerade so wie der gestrichene durch $\mathfrak{F}_n' dn'$. Die Gleichheit dieser beiden Drucke, die für die Plancksche Thermodynamik bewegter Systeme grundlegend ist, folgt also hier wieder als rein geometrische Aussage über das Verhalten vierdimensionaler Vektoren und ihrer Projektion.

Beim Operieren mit der Gesamtkraft \mathfrak{R} läßt sich eine so unmittelbare geometrische Schlußweise schwerer durchführen, weil sich \mathfrak{R} nicht wie ein Vektor verhält.

Wir kehren schließlich nochmals zur elektrodynamischen Bedeutung von $\mathfrak{F} = (Pf)$ zurück. Während diese im Anfange dieses Paragraphen durch die formale Übereinstimmung mit dem Lorentzschen Kraftansatz, Gleichung (13), begründet wurde, soll dieselbe jetzt direkt aus dem Relativitätsprinzip erschlossen werden.

Wir betrachten eine im gestrichenen System ruhende Volumeinheit, in welcher elektrische Ladung mit der Dichte ϱ' verteilt ist. Da die elektrische Feldstärke definiert ist als bewegendende Kraft auf die Ladung 1, so wirkt auf unsere Volumeinheit die Kraft $\varrho' \mathfrak{E}'$. Hierdurch sind die drei dynamischen Komponenten der spezifischen Kraft \mathfrak{F} im gestrichenen System bestimmt; die energetische Komponente ist gleich Null zu setzen, da der Angriffspunkt von \mathfrak{F} im gestrichenen System ruht und seine Weltlinie auf \mathfrak{F} senkrecht steht. Die vier Komponenten von \mathfrak{F} lauten also:

$$\mathfrak{F}_x = \varrho' \mathfrak{E}_x, \quad \mathfrak{F}_y = \varrho' \mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{F}_z = \varrho' \mathfrak{E}_z, \quad \mathfrak{F}_t = 0.$$

Andererseits liefert der Vektor (Pf) für die $x'y'z't'$ -Achse nach Gleichung (11), da $P_x = P_y = P_z = 0$, $P_t = i\varrho'$ (vgl. Gleichung (1)) und $f_{xt'} = -i\mathfrak{E}_x$ usw. (vgl. Gleichung (2)):

$$(Pf_x) = P_t f_{xt'} = \varrho' \mathfrak{E}_x, \quad (Pf_y) = P_t f_{yt'} = \varrho' \mathfrak{E}_y,$$

$$(Pf_z) = P_t f_{zt'} = \varrho' \mathfrak{E}_z, \quad (Pf_t) = P_t f_{tt'} = 0.$$

Dieser Vektor stimmt also für das gestrichene System in allen vier Komponenten mit der spezifischen Kraft \mathfrak{F} überein. *Unter der alleinigen Annahme, daß sich diese Kraft wie ein Vierervektor verhält, muß also \mathfrak{F} für jedes Bezugssystem durch den Vierervektor (Pf) gegeben sein.* In der Relativtheorie folgt also der Lorentzsche Kraftansatz unmittelbar aus der Definition der elektrischen Feldstärke unter der alleinigen Annahme, daß sich die spezifische Kraft wie ein Vierervektor verhält, der auf der Weltlinie des Angriffspunktes senkrecht steht. In der ursprünglichen Lorentzschen Absoluttheorie dagegen mußte dieser Kraftansatz als neue Erfahrungstatsache neben den Feldgleichungen eingeführt werden. *Es scheint mir eine besonders schöne Leistung der Relativtheorie zu sein, daß sie diese Erfahrungstatsache als solche entbehrlich macht, indem sie sie aus viel allgemeineren Prinzipien ableitet.*

Hieran schließt sich noch eine Bemerkung mehr kritischer Natur. Das Relativitätsprinzip will selbstverständlich nur für stationäre oder quasistationäre Bewegungen der beiden Bezugssysteme gegeneinander gelten. Eine Ableitung des Lorentzschen Kraftansatzes aus der Relativtheorie garantiert denselben daher nur für den Umfang dieser Bewegungen. Während man in der Absoluttheorie diesen Ansatz als allgemeingültig postulierte, wird man, wenn man das Relativitätsprinzip als seine wahre Quelle ansieht, es durchaus offen lassen müssen, ob nicht in dem Ausdruck von \mathfrak{F} für eine wirklich beschleunigte Bewegung Zusatzglieder auftreten können, die von der Beschleunigung erster und höherer Ordnung abhängen mögen. Da alle realisierbaren Bewegungen, wie es scheint, unter die Klasse der quasistationären Bewegungen fallen, so würden solche Zusatzglieder kaum ein praktisches Interesse haben. In prinzipieller Hinsicht aber scheint es mir nützlich, ihre Möglichkeit ins Auge zu fassen.

(Eingegangen 17. März 1910.)

4. Turbulenz bei einem Flusse¹⁾; von L. Hopf.

§ 1. Das Turbulenzproblem.

Bei seiner grundlegenden Untersuchung des Turbulenzproblems stellte sich Osborne Reynolds²⁾ auf den Standpunkt, daß die hydrodynamischen Gleichungen durchaus und für alle Fälle Gültigkeit besitzen, daß darum die — im Fall einer kreisrunden Röhre als Poiseuillesches Gesetz bekannte — Lösung dieser Gleichungen immer eine mögliche Strömung darstellt, daß aber diese mögliche Strömung nicht unter allen Umständen stabil ist, und darum bei bestimmten Versuchsbedingungen, und zwar gerade bei den großen Verhältnissen der Wasserleitungen usw., nicht in Erscheinung treten kann. Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung³⁾ leitete er ein Gesetz ab, nach welchem die einzige für eine Strömung zwischen festen Wänden charakteristische Konstante R , welche wir weiterhin als Reynoldssche Zahl bezeichnen wollen, sich aus Dichte ρ , Reibungskoeffizienten μ , mittlerer Geschwindigkeit \bar{v} und einer linearen Abmessung l der Strömung (wie Röhrendurchmesser, Tiefe oder dgl.) so zusammensetzt, daß

$$R = \frac{\rho \bar{v} l}{\mu}.$$

Durch eine Reihe von Experimenten an Röhren hat er ferner bewiesen, daß bei einer gewissen kritischen „Reynoldsschen Zahl“ die Poiseuillesche Strömung instabil zu werden beginnt, gleichgültig, welches der absolute Wert jeder einzelnen der in Betracht kommenden Größen ist.

Indes eine einwandfreie und befriedigende theoretische Durchführung dieses Gedankens von der Instabilität der laminaren Bewegung ist Reynolds doch nicht gelungen. Mit Hilfe einer Energiebetrachtung⁴⁾ erwies er zwar die Möglichkeit

1) Auszug aus der Münchner Dissertation 1909.

2) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 51—105, sowie die populären Vorträge über diesen Gegenstand, l. c. 2. p. 153—162 u. 524—534.

3) O. Reynolds, l. c. p. 55.

4) O. Reynolds, Scientific papers 2. p. 535—577.

einer solchen Instabilität, doch ist sein Resultat nur in sehr geringer Übereinstimmung mit der Erfahrung. Und viel weiter ist die Theorie auch bei Reynolds's Nachfolgern nicht gekommen. Lorentz¹⁾ vereinfachte und vertiefte zwar die Energiebetrachtung, doch ergab sich auch bei ihm noch kein ganz überzeugendes Resultat; Kelvin²⁾ gelangte zu der Konsequenz, daß es sich nicht um eine gewöhnliche, d. h. mit unendlich kleinen Störungen erregbare Instabilität handle; Rayleigh³⁾ bekämpfte dies Resultat, und zwar wohl mit Recht; und schließlich die konsequente Durchrechnung des Problems nach der Methode der kleinen Schwingungen durch Sommerfeld⁴⁾ ist noch nicht zu Ende geführt. So können wir die kardinale Frage, ob wir die hydrodynamische Theorie für die Erklärung des Turbulenzphänomens als zureichend ansehen dürfen oder nicht, noch keineswegs als gelöst betrachten.

Größeren Erfolg hat die weitere experimentelle Durchführung zu verzeichnen; Couette⁵⁾ bestätigte Reynolds's Resultate an Röhren und wies ein analoges Verhalten an einer Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Zylindern nach, von denen der eine bewegt wird; ein theoretisch sehr interessanter Fall, da er bei stabiler Strömung näherungsweise durch den einfachsten Ansatz einer linearen Geschwindigkeitsverteilung dargestellt werden kann, und so den Untersuchungen von Lorentz, Kelvin und Sommerfeld zugrunde liegt. Von weiteren Arbeiten nenne ich hier nur die von Ruckes⁶⁾, welcher zeigte, daß die für Flüssigkeiten geltenden Gesetze sich auf Gase übertragen lassen.

Gar nicht untersucht wurde dagegen bisher der Fall der freien Flußströmung, und es war aus verschiedenen Gründen verlockend, gerade diesen Fall experimentell zu behandeln. Nicht nur, daß die Lücke ausgefüllt werden mußte; es war auch sonst mancher Aufschluß durch das teilweise Fehlen

1) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theor. Physik 1. p. 43.

2) Lord Kelvin, Phil. Mag. Aug. u. Sept. 1887.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 1892. p. 59; Scientific papers 3. p. 575.

4) A. Sommerfeld, Verh. d. int. Mathem.-Kongresses, Rom 1908.

5) M. Couette, Ann. de chim. et phys. 21. p. 433. 1890.

6) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25. p. 983. 1908.

fester Wände zu erwarten; ja man konnte sogar hoffen, an dem Verhalten der freien Oberfläche einiges vom Verlauf der „turbulenten Bewegungen“ geradezu zu sehen.

§ 2. Apparat und Ausrechnung der Experimente.

Die der Untersuchung dienende Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt.

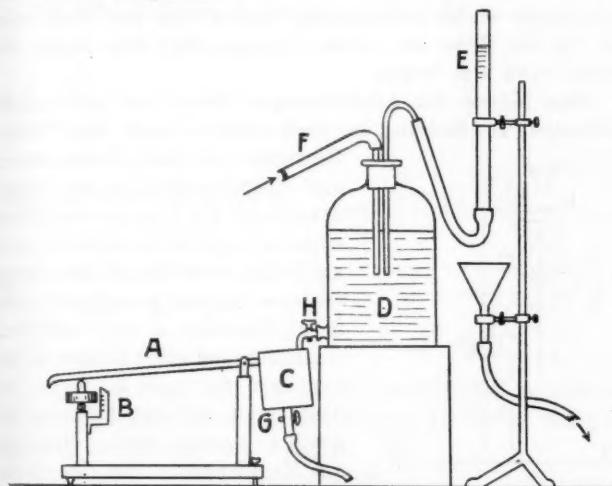


Fig. 1.

Eine sorgfältig geglättete Messingrinne *A* von 5,2 cm Breite diente als Flußbett und konnte durch eine Schraube *B* mit 1,3 mm Ganghöhe ein beliebiges Gefälle erhalten. Über diese Rinne sollte das Wasser nur unter Einfluß der Schwere strömen. Um möglichst alle Störungen auszuschalten, gelangte das Wasser von der Leitung her bei *F* in eine große, 20 Liter fassende Flasche *D*, von dieser in ein kleineres, 3 Liter fassendes Gefäß *C*, das mit der Rinne fest verbunden war, und aus dem das Wasser in die Rinne hinein überlief. Durch den Hahn *G* war eine feinere Regulierung möglich gemacht. Um von den starken Schwankungen in der Leitung unabhängig zu werden, wurde noch ein Überlauf *E* an die Flasche angeschlossen, so daß die Ausflußmenge durch den Überdruck

des Niveaus in *E* über das Niveau in *C* gegeben und, durch Einstellung des Wasserleitungshahnes und der beiden Hähne *G* und *H* passend geregelt, auf beliebige Zeit konstant blieb.

Bei den Versuchen mit Zuckerlösung wurde die Wasserleitung durch ein auf hohem Gerüst festgestelltes, 200 Liter fassendes Blechgefäß ersetzt, in welches nach Beendigung des Versuches die aufgefangene Flüssigkeit mittels einer Wasserstrahlpumpe wieder emporgesaugt wurde; das war leicht möglich, da die Höhe des oberen Gefäßes über dem Boden des unteren etwa 4 m betrug.

Zum Messen der Ausflußmengen diente eine gewöhnliche Meßflasche; zur Messung der Tiefe wurde — nach vergeblichen

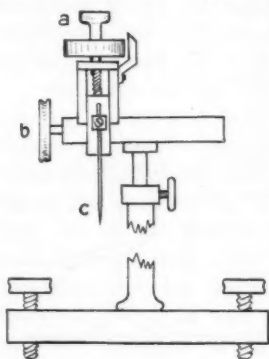


Fig. 2.

Versuchen mit einem Dickenmesser und einem Senkblei — ein besonderer durch Fig. 2 veranschaulichter einfacher Apparat konstruiert: eine am Boden feststehende Anordnung mit einer vertikal beweglichen, sehr feinen Schraube *a* von 0,434 mm Ganghöhe und einer horizontal beweglichen Schraube *b*, deren Bedeutung im nächsten Paragraphen deutlich werden wird. Berührte die Metallspitze *c* die Oberfläche des Flusses, so ließ sich das an einer deutlichen Zuckung und Wellenbildung an der Oberfläche

sehr gut erkennen. Die Berührung mit der Grundfläche wurde durch Schließung eines elektrischen Stromkreises noch genauer beobachtet.

Das Gefälle wurde an der Schraube *B* (Fig. 1) abgelesen, nachdem vor jedem Versuch die Rinne mittels einer Libelle horizontal gestellt war, sowohl in der Stromrichtung, wie senkrecht dazu.

Zunächst ist die Formel zur Ausrechnung der Versuche anzugeben. Wir suchen die Ausflußmenge Q pro Sekunde in einem Flusse von endlicher, aber gegen die Tiefe h sehr großer Breite $2b$, von der Dichte ρ und der Reibungskonstanten μ , bei einem Gefälle α . Wir rechnen unter Voraus-

setzung einer stabilen laminaren Strömung, d. h. wir nehmen von vornherein eine Geschwindigkeitskomponente nur in der durch das Flußbett bestimmten x -Richtung an. In der x -Richtung wird die Strömung beiderseits unbegrenzt angenommen. In der um α gegen die Vertikale geneigten y -Richtung reicht sie von $y = 0$ (Grund) bis $y = h$ (Oberfläche), in der z -Richtung von $z = -b$ bis $z = +b$ (seitliche Ränder des Flusses).

So haben wir die Differentialgleichungen zu lösen:

$$(1) \begin{cases} \mu \Delta u = -\rho g \sin \alpha, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2) \begin{cases} u = 0 & \text{für } y = 0, \\ u = 0 & \text{für } z = \pm b, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{für } y = h, \\ p = 0 & \text{für } y = h. \end{cases}$$

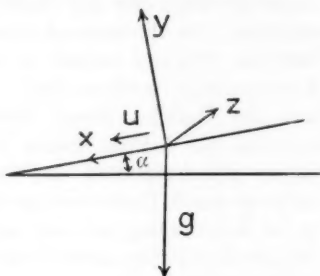


Fig. 3.

Um die Darstellung nicht zu sehr zu unterbrechen, unterdrücke ich die mathematischen Durchführungen an dieser Stelle und verweise deshalb auf den Anhang.

Dort wird das Resultat erhalten:

$$(3) \quad Q = \frac{2}{3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} b h^3 \left(1 - 0,63 \frac{h}{b} \right).$$

Das erste Glied ist der bekannte Ausdruck für unendliche Breite, das zweite bringt die Korrektur auf endliche Breite bis auf Glieder von der Größenordnung $e^{-\frac{2h}{b}}$.

Ziel der Experimente war, festzustellen, ob und inwieweit Formel (3) — als Konsequenz der hydrodynamischen Theorie — Gültigkeit beanspruchen darf.

Um dies in den Kurven gut zum Ausdruck zu bringen, befolgte ich die bei derartigen Untersuchungen meistens gewählte Methode, den „kinematischen Reibungskoeffizienten“ μ/ρ als Unbekannte zu betrachten, und unter Zugrundelegung obiger Formel zu messen. Solange sich ein konstanter Wert ergab, konnte die Formel als richtig angesehen werden.

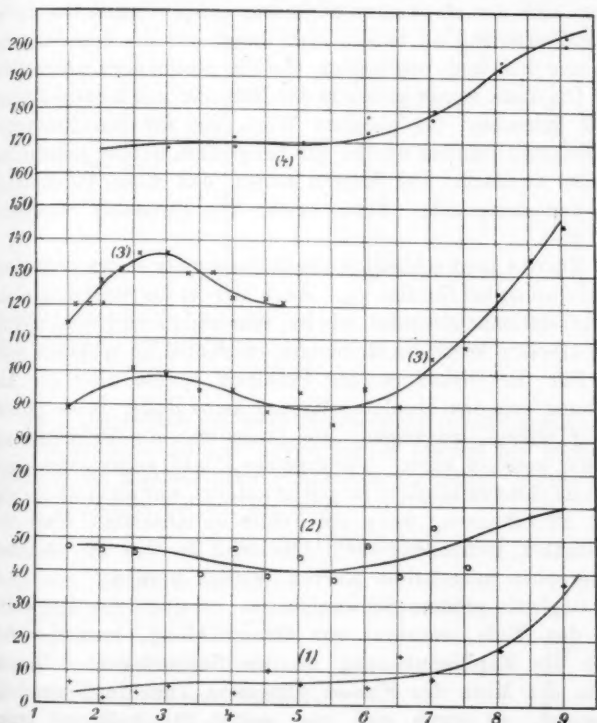
§ 3. Fehlerquellen.

Dem ganzen Problem nach war es nicht das Ziel der Experimente, auf eine sehr große Meßgenauigkeit hinzuarbeiten, zumal derselben durch verschiedene, schwer eliminierbare Fehlerquellen eine Grenze gesetzt war. Bei Versuchen in einer Röhre oder bei der Couetteschen Anordnung gilt es nur, Drucke, Widerstände und Ausflußmengen zu messen, lauter Größen, die nur linear in die zu prüfende Beziehung eingehen; die linearen Abmessungen der Strömung bleiben konstant und sind einfach zu bestimmen. Bei den vorliegenden Experimenten machten auch die Messung der Ausflußmenge und des Gefälles keine Schwierigkeiten, da sie sich ohne weiteres auf 1 Proz. genau angeben ließen. Dagegen traten starke Schwierigkeiten auf bei Messung der Tiefe. Diese steht in der 3. Potenz in der Gleichung für die Ausflußmenge; es ist daher nötig, sie sehr genau zu bestimmen. Zudem ist die absolute Größe dieser Tiefe nur sehr gering, etwa 1—3 mm. Wollte man also nur so weit kommen, als zur Entscheidung des Problems dringend erforderlich war, so mußte die Tiefe auf etwa $\frac{1}{50}$ mm genau gemessen werden. Die im vorigen Paragraphen beschriebene Anordnung gab eine viel größere Genauigkeit; denn sowohl die Berührung der Oberfläche, wie der Grundfläche war sehr deutlich zu sehen. Aber es kommen an der freien Oberfläche eines Stromes verschiedene Fehlerquellen in Betracht, die diese Genauigkeit zu einer illusorischen machen, und auf die wir einzeln eingehen müssen.

Ein Punkt, der sogleich in die Augen springt, ist die Ungleichheit der Tiefe in der Stromrichtung. Einmal ist die aus dem Gefäß *C* austretende Strömung erst in einiger Entfernung als stationär anzusehen, dann gibt es am Ausfluß eine kleine Stauung, ferner würde unser Ansatz beim Gefälle Null auch die Geschwindigkeit Null erfordern, was durchaus nicht erfüllt ist, da die Erhebung der oberen über die unteren Wasserschichten auch in diesem Falle eine Strömung hervorrufen würde. Unsere Formel gilt für eine stationäre, beschleunigungslose Strömung mit einer parallel zur Grundfläche gerichteten Oberfläche. Da nun aber durch jeden Stromquerschnitt in derselben Zeit dieselbe Flüssigkeitsmenge fließen muß, wird

obige Formel richtig angewandt werden, wenn man nur an einer Stelle mißt, an welcher die Oberfläche parallel der Grundfläche verläuft. Mißt man an irgend einer anderen Stelle, so setzt man offenbar eine zu große Tiefe in Formel (3) ein, und erhält infolgedessen eine zu große Ausflußmenge, bzw. einen zu großen Reibungskoeffizienten.

Fig. 4 zeigt Höhenkurven in der Stromrichtung und gibt so Anschluß über die hier zu erwartenden Versuchsfehler.



Abzisse: Marken (Schrauben) an der Rinne, im Abstand von etwa 4,5 cm. Ordinate: Einteilung der Meßschraube. Anfangspunkt willkürlich gewählt. 10 Teilstriche der Ordinate = 0,02 mm. Größter Fehler etwa ebensoviel, also durchaus innerhalb der Fehlergrenze; die in einzelnen Kurven scheinbar systematischen Abweichungen sind daher ohne Bedeutung.

Fig. 4. Oberfläche in der Stromrichtung.

Kurven 1, 2, 3 sind an Wasserströmungen von ungefähr gleicher Ausflußmenge aufgenommen, bei Gefällen von $\frac{1}{25}$, bzw. $\frac{1}{50}$ und $\frac{1}{125}$. (3') ist eine teilweise, genauere Nachprüfung von (3). Man sieht, daß sich bei den ersten beiden Gefällen eine stationäre Strömung, wie man sie verlangen muß, genügend genau herstellt, bei ersterer zwischen den Marken 2 und 6, bei letzterer etwa zwischen 4 und 6. Kurve 3 zeigt dagegen nur ein Minimum, und man ist wohl sicher, an der Stelle des Minimums eine der stationären Strömung entsprechende Geschwindigkeitsverteilung zu haben, nicht aber, daß die Geschwindigkeit der bei dem bestimmten Gefälle stationären entspricht.

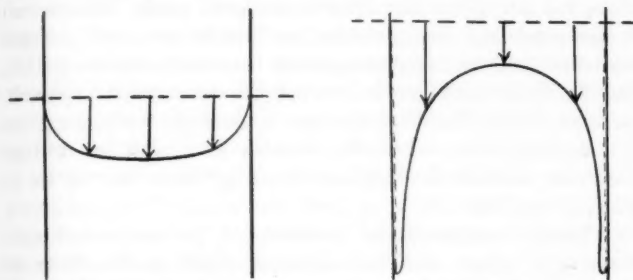
Die Tiefe wurde immer in der Nähe der mit 5 bezeichneten Stelle gemessen; der absolute Wert, der für den Reibungskoeffizienten erhalten wurde, war bei großem Gefälle richtig, bei kleinem zu hoch. Die Kurven zeigen, daß diese Abweichung aus der mangelnden Stationarität der Strömung verständlich wird.

Kurve 4 zeigt schließlich die Strömung der ersten benutzten Zuckerlösung bei Gefälle $\frac{1}{25}$. Auch hier ist die Strömung nicht so gut stationär geworden wie bei Wasser; so wird wohl der zu hohe absolute Wert des Reibungskoeffizienten zu erklären sein.

Für die Diskussion des Problems spielte aber die Abweichung von den absoluten Werten keine Rolle, da es ja nur darauf ankam, zu zeigen, wie lange man die Strömung als laminar ansehen kann. Der kritische Punkt, an welchem diese einfache Gesetzmäßigkeit zu gelten aufhört, war auch dann sehr wohl zu erkennen, wenn ein Fehler im absoluten Wert der Konstanten vorhanden war. Das wird an den im nächsten Paragraphen mitgeteilten Kurven deutlich werden.

Ungleich größere Schwierigkeiten bereitete die Ungleichheit der Tiefe senkrecht zur Stromrichtung, hervorgerufen durch die Kapillarerhebung an den Seitenrändern. Wurde die in der Mitte des Flusses gemessene Tiefe in Formel (3) eingesetzt, so ergab sich nie, selbst für noch so langsame und seichte Strömung, ein konstanter Wert für den Reibungskoeffizienten, und zwar immer zu niedrige Werte, was eine Deutung als Turbulenzerscheinung vollkommen ausschloß. Daß wirklich die Kapillarerhebung an den Wänden eine so große Wirkung verursachte, konnte dadurch leicht deutlich

gemacht werden, daß feines Mennigepulver in die Strömung geworfen wurde. Anstatt daß nun, wie man erwarten mußte, in der Mitte die größte Geschwindigkeit, an der Seite nur eine kleine aufgetreten wäre, und so die Mennige auf der Oberfläche, gegen den Strom gesehen, eine konvexe Kurve gebildet hätte, zeigte sich eine konkave Kurve, und zwar mit sehr weit voreilenden Seitenstücken. Die beiden Bilder sind nachstehend (Fig. 5) skizziert.



Strömung ohne Kapillarwirkung
nach Formel (7) des Anhangs.

Beobachtete Strömung.

Fig. 5.

Auch theoretisch ist diese Erscheinung leicht einzusehen. Die Differentialgleichungen der Strömung bleiben bei Berücksichtigung der Kapillarwirkung dieselben wie früher, ebenso die Grenzbedingungen bis auf die eine:

$$p_n = 0 \text{ an der Oberfläche,}$$

welche nun die Form erhält:

$$(4) \quad \pm T \frac{d\varphi}{ds} + g\varphi \cos \alpha y = 0,$$

wobei s die Bogenlänge der Oberfläche von der Mitte aus bedeutet, φ den Winkel der Tangente an die Oberfläche gegen die z -Achse, T die Kapillarkonstante.

Von den beiden Vorzeichen der Krümmung $d\varphi/ds$ müssen wir das negative wählen, da der

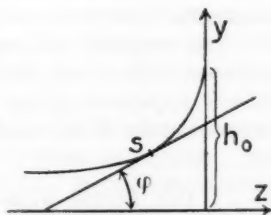


Fig. 6.

Kapillardruck den nach unten wirkenden Zug der Schwere zu verkleinern strebt.

Wir können der Gleichung sofort ein wichtiges Resultat ansehen: In der die Gestalt der Oberfläche bestimmenden Gleichung (4) kommt keine Geschwindigkeit vor, in den die Strömung bestimmenden Differentialgleichungen (1) und den übrigen Grenzbedingungen (2) tritt umgekehrt die Form der Oberfläche nicht auf; nur das Gefälle spielt in beiden eine Rolle, allerdings bei der Form der Oberfläche keine große, da nur $\cos \alpha$ bestimmend ist. Bei gleichem Gefälle können wir jedenfalls schließen (und in Annäherung auch bei verschiedenem Gefälle), daß die Form der Oberfläche unter Einwirkung der Kapillarität (solange keine Oberflächenwellen auftreten) unabhängig von der Ausflußmenge ist.¹⁾ Es ist also klar, daß bei geringer Tiefe der Einfluß der Kapillarität ein größerer ist wie bei beträchtlicher Tiefe.

Durch Integration der Gleichung (4)²⁾, sowie aus direkten Messungen ergab sich das Resultat, daß an der Seite das Wasser um etwa 2,5 mm höher stand, wie in der Mitte. Da bei den Messungen die Tiefe des Flusses selten größer war als etwa 2,5 mm und manchmal sogar kleiner als 1 mm, die Ausflußmenge aber mit der dritten Potenz der Tiefe wächst, so ist leicht einzusehen, daß die Kapillarerhebung die Resultate vollkommen verschleiern mußte.

Es war die größte Schwierigkeit bei der ganzen Arbeit, dieser Fehlerquelle Herr zu werden. Es gelang mir nicht, die Strömungsaufgabe, wie sie im Anhang für eine ebene Oberfläche gelöst wird, auch für die durch Kapillarität veränderte Oberfläche zu diskutieren. Auch eine graphische Näherung ergab kein befriedigendes, die Versuchsergebnisse gut darstellendes Resultat.

So versuchte ich denn die Kapillarerhebung ganz zu beseitigen, indem ich die Seitenwände stark einfettete. Eine kleine Kapillardepression konnte ja das Resultat nicht in nennenswerter Weise ändern, da eine solche nur an Stellen

1) Dies Resultat wurde auch schon von R. H. Weber erhalten, Ann d. Phys. 26. p. 884. 1908.

2) Vgl. Dissertation, Anhang 2.

geringer Ausflußmenge wirksam ist, da ferner der Randwinkel bei Depression viel größer und daher die Abweichung der Oberfläche von der Horizontalen viel geringer ist. Die ersten so gemachten Experimente gaben ein befriedigendes Resultat, die weiteren nicht mehr. Es zeigte sich, daß die Wirksamkeit des Fettes in dieser Hinsicht ziemlich schnell erlosch. Dasselbe ergaben Versuche mit Paraffinwänden. Schließlich verfuhr ich in der Weise, daß ich für jede Messung an die Seitenwände neue Streifen von paraffiniertem Asbestpapier klebte. Versuche zeigten, daß dies etwa eine Stunde lang mit dem gesuchten Erfolge benutzt werden konnte; und eine Messung dauerte etwa $\frac{1}{3}$ Stunde. Paraffinierte Papierstreifen waren nicht verwendbar, da sie sich, wohl infolge der Quellung der Pflanzenfaser, viel schneller abnützten.

Daß auf diese Weise alle systematischen Fehler vermieden waren, zeigten Versuche mit Mennige in der oben geschilderten Art, und schließlich am klarsten das Resultat: ein richtiger, konstanter Wert des Reibungskoeffizienten.

Dennoch war es immer eine ziemliche Schwierigkeit, die Tiefe mit der nötigen Genauigkeit zu messen. Die rauen Ränder der Asbeststreifen verursachten doch stets unregelmäßige Erhebungen der Oberfläche, die oft viel mehr wie $\frac{1}{160}$ mm — die erforderte Genauigkeit — betrugen; dazu kamen die regelmäßigen Oberflächenwellen, von denen später ausführlich die Rede sein wird. Um also ein genaues Resultat zu erhalten, mußte die Berührung der Schraubenspitze mit der Oberfläche öfter an der Schraubentrommel abgelesen und dann ein Mittelwert bestimmt werden. Es wurden immer etwa 20 solche Ablesungen gemacht und zwar an 2 bis 4 verschiedenen Stellen des Flusses in der Nähe der Marke 5 (Fig. 4). Zwischen je zwei Ablesungen wurden die Seitenwände mit Filterpapier abgewischt, um die Bedingungen an den Rändern möglichst verschieden zu gestalten und so systematische Fehler zu vermeiden. So gelang es schließlich doch, die Tiefe auf etwa 1—1,5 Proz. genau anzugeben, d. h. im Werte der Reibungskonstanten eine Genauigkeit von 3—5 Proz. zu erzielen. Nur ganz selten traten in den im nächsten Paragraphen mitzuteilenden Kurven Punkte auf, die stärkere Abweichung zeigten.

§ 4. Resultate.

Die Resultate der Messungen sind niedergelegt in den Figg. 7—14, zu deren Interpretation es nur weniger Angaben bedarf.

Als Abszisse dient die einzige für jede Strömung charakteristische Größe, die Reynoldssche Zahl

$$R = \bar{v} h \frac{\rho}{\mu} = \frac{Q}{2b} \cdot \frac{\rho}{\mu},$$

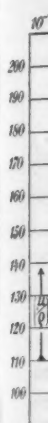
welche aus den gemessenen Größen Q und b und aus dem, den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommenen Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten berechnet ist.

Als Funktion der Reynoldsschen Zahl ist die Größe μ/ρ aufgetragen, so wie sie sich bei Anwendung der Formel (3) aus den gemessenen Größen ergibt. Natürlich ist dabei auf die Temperatur sorgfältig Rücksicht genommen, indem vor und nach dem Versuch ein im Gefäß C befindliches Thermometer abgelesen wurde, und sind alle Messungen, um sie vergleichbar zu machen, nach den aus Landolt-Börnstein bekannten Verhältnissen auf eine mittlere Temperatur reduziert, die in den Kurven vermerkt ist.

So geben die Kurven ein Bild des Widerstandes in der Flüssigkeit oder der von der Schwere geleisteten Arbeit als Funktion der Strömungskonstanten R . Solange die Poiseuille'sche laminare Strömung stabil bleibt, ergibt sich ein konstanter Wert von μ/ρ . Für große R wird diese Konstanz nicht erhalten, die Stabilität der Strömung ist gestört, bei weiterer Anwendung der Formel (3) ergibt sich ein immer größer werdender scheinbarer Reibungskoeffizient.

Die Kurven, welche die von der Beobachtung gelieferten Punkte verbinden sollten, waren bei der verhältnismäßig großen Ungenauigkeit der Messungen einer gewissen Willkür anheimgegeben, welche die Resultate zu verschleiern drohte. Um diese nach Möglichkeit einzuschränken, wurden folgende Bestimmungen konsequent festgehalten:

Die Punkte sind bis zum kritischen Wert R_k durch eine horizontale Gerade $\mu/\rho = a$ zu verbinden, von da an durch eine geneigte Gerade $\mu/\rho = a + b(R - R_k)$. Die Konstanten a

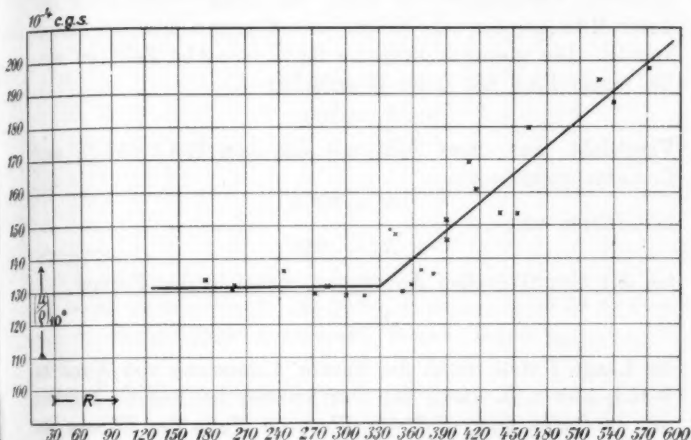


(u)

an
nie

und b sind nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu bestimmen. Für R_k sind nacheinander einige Werte festzusetzen, und derjenige ist schließlich als die gesuchte kritische Zahl anzugeben, der den geringsten wahrscheinlichen Beobachtungsfehler Δ aufweist.

Fig. 7 zeigt die erste und am genauesten verfolgte derartige Kurve, aufgenommen bei einem Gefälle $1/25$.



$(u/\eta)_{10^0}$ bedeutet, daß alle Werte des kinematischen Reibungskoeffizienten auf die Temperatur 10^0 reduziert sind.

Fig. 7. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $1/25$.

Die geschilderte Methode wurde auf fünf verschiedene R_k angewandt, und es ergab sich das in der folgenden Tabelle niedergelegte Resultat:

R_k	Δ
310	4,96
330	4,69
340	4,71
350	4,73
360	4,88

Man sieht ohne weiteres, besonders wenn man sich diese Tabelle graphisch aufträgt, daß das Minimum in der Nähe von 330 liegt und etwa auf 3 Proz. genau zu bestimmen ist.

Um von der Größe des wahrscheinlichen Fehlers einen Begriff zu geben, sei bemerkt, daß er etwa 3 Proz. Abweichung im Werte des Reibungskoeffizienten entspricht, also etwa 1 Proz. in der Tiefenmessung. Nach den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen ist klar, daß diese Genauigkeit nur durch Mittelung aus sehr vielen Beobachtungen erhalten werden konnte. Die gesuchte kritische Reynoldssche Zahl ist also bei einem Fluß mit freier Oberfläche:

$$R_k = 330.$$

Vergleicht man diese Zahl mit den von Reynolds und Couette gefundenen:

$$R_k = 2200$$

bei Röhren und

$$R_k = 950$$

bei der Couetteschen Anordnung, wobei in der Formel

$$R = \frac{\rho \bar{v} l}{\mu}$$

die Länge l stets durch die lineare Abmessung von Wand zu Wand, also z. B. durch den Durchmesser bei Röhren gegeben ist, so findet man, daß der Wert im Falle des Flusses ein erheblich niedrigerer ist, wie bei allseitiger Begrenzung durch feste Wände; daß also eine freie Oberfläche nicht die stabilisierende Kraft einer festen Wand hat.

Nach dem Reynoldsschen Gesetze sollen nun alle Strömungen ähnlich sein, welche dieselbe Reynoldssche Zahl R haben, und es muß also auch die kritische Zahl R_k für alle Gefälle, alle Flüssigkeiten, alle Wandmaterialien dieselbe sein.

Figg. 8—10 prüfen die Gültigkeit des Gesetzes für verschiedene Gefälle, sind nach der gleichen Methode behandelt und ergeben das Resultat:

Gefälle	R_k	\bar{v}	Δ
$\frac{1}{125}$	300	13,5 cm/sec	1,83
$\frac{1}{50}$	310	20 "	2,83
$\frac{1}{25}$	330	26,5 "	4,69
$\frac{3}{50}$	330	31,5 "	4,77

Das Reynoldssche Gesetz kann also an Flüssen von verschiedenem Gefälle innerhalb der Fehlergrenze bestätigt werden. Variation des Gefälles ist gleichbedeutend mit Variation der Geschwindigkeit und der Tiefe. Die dritte Spalte der

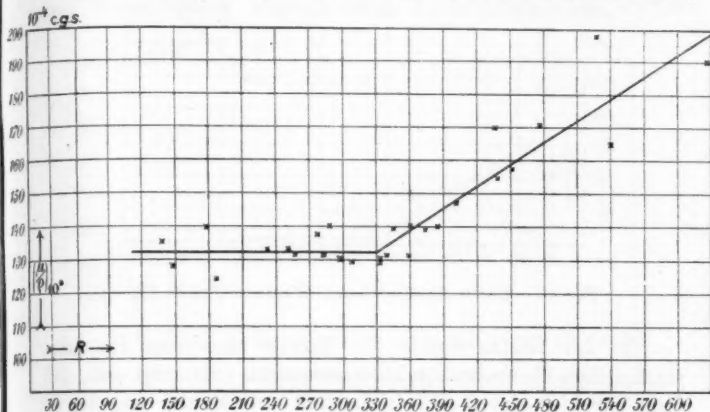


Fig. 8. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $1/50$.

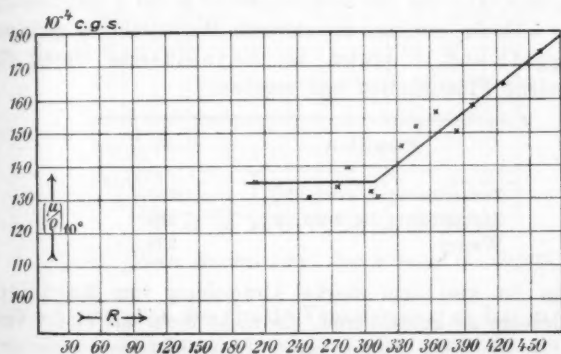


Fig. 9. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $1/50$.

Tabelle zeigt, wie stark die Geschwindigkeit bei den verschiedenen Neigungen variiert. Dennoch bleibt die kritische Reynoldssche Zahl merklich konstant. Wichtig für spätere Betrachtungen ist noch, daß unter keinen Umständen — auch

nicht in zweiter Näherung — eine Abnahme von R_k bei zunehmendem Gefälle zu konstatieren ist.

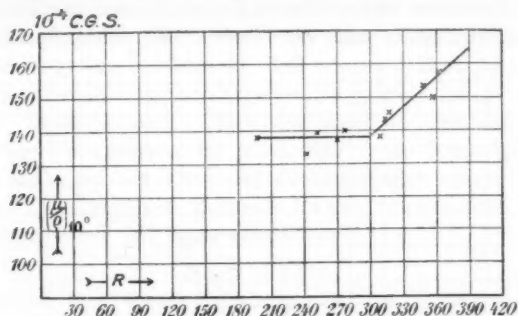


Fig. 10. Glatte Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{135}$.

In der letzten Spalte der Tabelle sind noch die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vermerkt. Es zeigt sich, daß diese für kleineres Gefälle sich stark verkleinern, und das ist leicht begreiflich; denn bei kleinerem Gefälle ist erstens die Tiefe größer, also der Beobachtungsfehler in der Tiefenmessung nicht so wirksam, zweitens die störende Wellenbildung geringer.

Fig. 11 und 12 prüfen das Reynoldssche Gesetz für verschiedene Flüssigkeiten und ergeben:

Flüssigkeit	R_k
Zuckerlösung I, etwa 25%	250
Zuckerlösung II, etwa 12%	280
Wasser	330

Hier ist also eine starke Abweichung vom Reynoldsschen Gesetze zu konstatieren, die nicht mehr als bloßer Versuchsfehler gedeutet werden kann. Dies sieht man leicht ein, wenn man z. B. versucht, die Beobachtungen der Fig. 10 u. 11 gleichmäßig durch Festsetzung der kritischen Zahl $R_k = 270$ zu befriedigen. Rechnet man dann nämlich den Beobachtungsfehler Δ im Sinne der Tabelle p. 789 aus, so erweist er sich im ersten Falle als weit vor seinem Minimum, im zweiten Falle als weit dahinter gelegen.

Durch die Versuche von Ruckes war ferner nahegelegt, daß Wandmaterial und Wandrauhigkeit einen starken Einfluß auf die kritische Zahl hätten. Es lag also die Vermutung nicht fern, man könne die Abweichung auf ein Rauwerden der Wand durch abgeschiedene Zuckerkryställchen zurück-

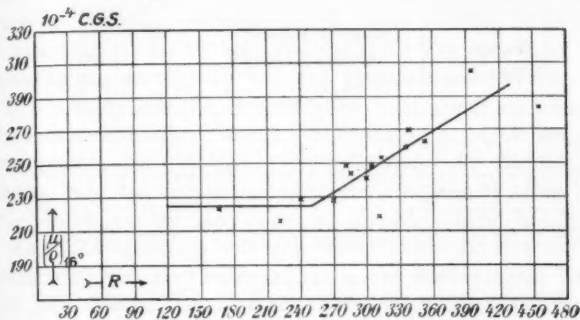


Fig. 11. Glatte Messingrinne. Zuckerlösung I. Gefälle $\frac{1}{35}$.

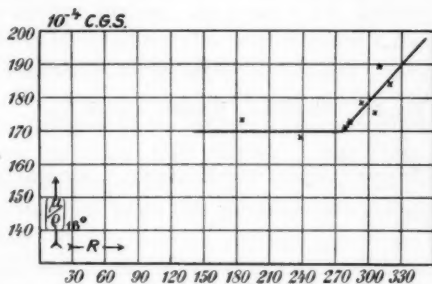


Fig. 12. Glatte Messingrinne. Zuckerlösung II. Gefälle $\frac{1}{35}$.

führen. Das war die direkte Veranlassung zu den in Figg. 13 und 14 niedergelegten Versuchen. Es wurde in die § 2 beschriebene Rinne einmal eine durch Feilstriche geraute Messinggrundfläche, einmal eine sehr glatte Grundfläche aus Spiegelglas hineingelegt und R_k gemessen. Die Fehler waren naturgemäß bei der rauhen Grundfläche etwas größer wie sonst. Bei der Glasfläche trat die Schwierigkeit auf, daß die Berührung der Schraubenspitze mit der Grundfläche nicht

durch den elektrischen Kontakt gemessen werden konnte, doch gab auch die Beobachtung der Berührung mit dem Spiegelbild die nötige Genauigkeit.

	Grundfläche	R_k
Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$	Glattes Messing . . .	310
	Raues Messing . . .	300
	Glas	310

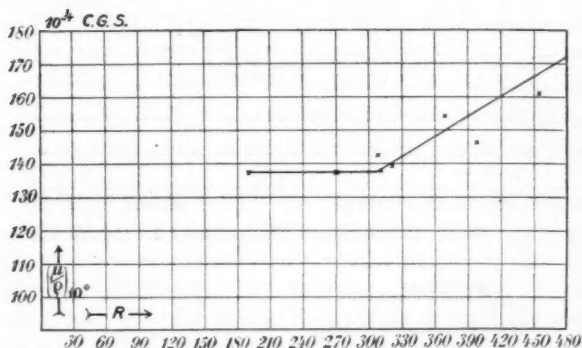


Fig. 13. Glasrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$.

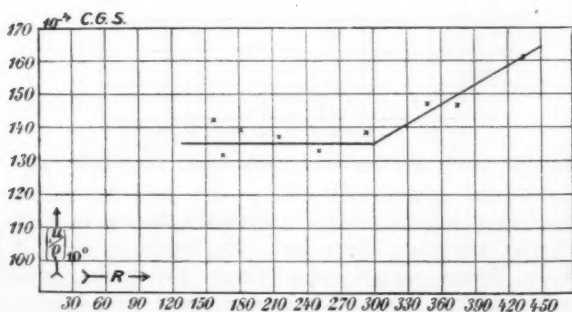


Fig. 14. Raue Messingrinne. Wasser. Gefälle $\frac{1}{50}$.

Die Kurven sind weder experimentell noch in der Ausrechnung so genau verfolgt, wie die früheren, zeigen aber

deutlich, daß eine merkbare Änderung der kritischen Zahl nicht vorhanden ist.

Im Hinblick auf den vorigen Paragraphen soll noch bemerkt werden, daß die absoluten Werte der Reibungskonstanten in den Kurven einen systematischen Fehler in der nach Fig. 4 erwarteten Richtung aufweisen; daß dieser in Figg. 13 und 14 so viel größer ist als in der entsprechenden Fig. 9, erklärt sich ungezwungen daraus, daß bei den entsprechenden Versuchen die in die Rinne gelegten Grundflächen nicht gleich am Gefäß *C* begannen, und so der Eintritt des stationären Zustandes verzögert wurde. Die richtige Reibungskonstante für die Zuckerlösungen, wie sie zur Berechnung der Abszisse *R* nötig war, wurde durch exakte Messungen in Kapillarröhren bestimmt.

Das Hauptproblem war nun weiter, über die Gründe der Abweichung vom Reynoldsschen Gesetz Rechenschaft abzugeben. Zu diesem Zweck mußte zunächst untersucht werden, ob die Abweichung nicht vielleicht durch die Beschaffenheit der Flüssigkeit allein bedingt war und ob man sie nicht auch in Röhren finden konnte. Es wurde zu diesem Zweck die kritische Zahl für Wasser- und Zuckerlösung I in einer Röhre gemessen. Die verwendete Glasröhre hatte einen Radius von 0,131 cm. Die Ausflußmengen wurden wieder mit der Meßflasche, die Druckhöhen bei größeren Drucken direkt gemessen, bei kleineren mit dem Kathetometer. Aus Gründen, die in der Dissertation auseinandergesetzt werden, trat der Strahl am Ende der Röhre frei aus. Das Resultat ist in Figg. 15 und 16 niedergelegt:

Flüssigkeit	R_k	\bar{v}
Wasser	2280	100 cm/sec
Zuckerlösung I .	2200	170 „

Die Abweichung ist also durchaus nicht von der Größenordnung wie beim Flusse und ist dort nicht als Eigenschaft der Flüssigkeit, sondern als für die freie Oberfläche charakteristisch anzusehen.

Also: das Reynoldssche Gesetz stellt die Stabilitätsverhältnisse einer Flußströmung nur unvollkommen dar, insofern die kritische Zahl nicht unabhängig vom Reibungskoeffizienten ist.

So befremdlich dieses Resultat auf den ersten Blick erscheinen mag, gibt doch die Theorie die Mittel an die Hand, um wenigstens qualitativ die Ursache zu durchschauen.

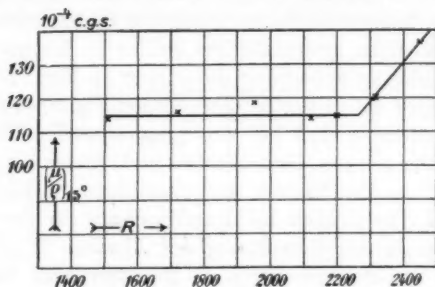


Fig. 15. Glasröhre. Wasser.

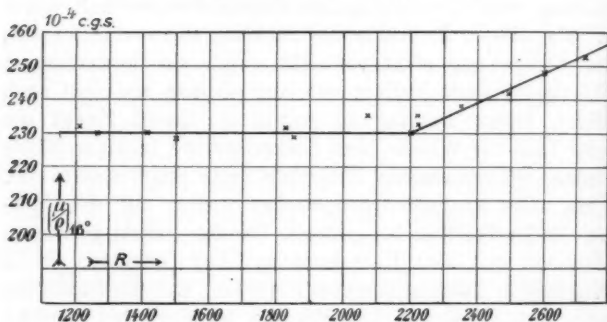


Fig. 16. Glasröhre. Zuckerlösung I.

Denn das Reynoldssche Gesetz ruht auf einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung. Vergleicht man die Dimensionen der einzelnen in der Differentialgleichung stehenden Ausdrücke, so ergibt sich, daß zwei Strömungen als ähnlich betrachtet werden können, wenn sie die gleiche Reynoldssche Zahl R besitzen. Die Grenzbedingungen sagen bei einer beliebigen zwischen festen Wänden verlaufenden Strömung nichts weiter aus, als daß an den Wänden Tangential- und Normalgeschwindigkeit verschwinden müssen. Sie liefern daher keine neue reine Zahl und fallen für die Dimensionsbetrachtung nicht ins Gewicht. Gerade dieses Umstandes wegen

ist die Reynoldssche Zahl die einzige für derartige Strömungen charakteristische Größe, so daß sie allein auch z. B. für die Gültigkeitsgrenzen des Poiseuilleschen Gesetzes entscheidend ist. Obige Messungen an Röhren bestätigen das wieder in weitgehender Weise. Man beachte nur, wie verschieden die Größe der mittleren Geschwindigkeiten an der kritischen Grenze (vgl. Tabelle p. 795) ist, daß diese um 70 Proz. differieren und daß sich trotzdem die Konstanz der Reynoldsschen Zahl bis auf etwa 4 Proz. bewährt.

Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse bei einem Flusse. Auch hier liefern die Grenzbedingungen am Grund und diejenige, welche Verschwinden des Tangentialdruckes an der Oberfläche verlangt, nichts Neues. In der Grenzbedingung aber, welche Verschwinden des Normaldruckes auf die Oberfläche fordert, tritt eine neue charakteristische Zahl auf. Für stationäre Strömung und unendliche Breite geschrieben, lautet diese Bedingung

$$g \rho \cos \alpha \cdot \eta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \eta} - T \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0,$$

wenn η die Erhebung über die glatte Oberfläche, T die Kapillaritätskonstante bedeutet, und die Krümmung der Oberfläche näherungsweise $= d^2 \eta / dx^2$ gesetzt wird, wie es ja bei Wellenbetrachtungen stets geschieht.¹⁾

Diese Grenzbedingung ergibt kein Dimensionskriterium im Falle einer glatten ungewellten Oberfläche, und würden wirklich an der Oberfläche keine Wellen auftreten, so müßte das Reynoldssche Gesetz für Flüsse ebensogut erfüllt sein, wie für Strömungen zwischen festen Wänden. Im Falle einer Wellung dagegen darf man zwei Strömungen mit gleicher Reynoldsscher Zahl nicht als ähnliche Strömungen ansehen, da die Oberflächenbedingung für wirklich ähnliche Zustände eine weitere Dimensionsgleichheit fordert, welche besonders durch die, der Differentialgleichung ganz fremde, Größe T der Kapillarität bestimmt wird.

Nun muß aber beim Einsatz der turbulenten Bewegungen eine Wellung in der Flüssigkeit entstehen, welche auch die Oberfläche zu stören trachtet und so die Kapillarität, welche

1) Die obige Gleichung (4) geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man parallele Stromfäden ($v = 0$) annimmt.

auf verschiedene Wellenlängen verschieden wirkt, in Mitleiden-schaft ziehen muß. In Dimensionen geschrieben lautet obige Gleichung:

$$[\varrho v^2] = \left[\mu \frac{v}{l} \right] = \left[\frac{T}{l} \right]$$

und ergibt außer der Reynoldsschen Zahl R noch die charakteristische Zahl:

$$S = \frac{\mu v}{T}.$$

Leider läßt es sich doch nicht ganz einwandfrei feststellen, daß gerade die Änderung dieser Zahl die Abweichung vom Reynoldsschen Gesetze verursacht. Zwar ist es physikalisch gewiß plausibel, daß Vergrößerung der Kapillarität die Verhältnisse denen einer mitbewegten festen Wand an der Oberfläche zu nähern strebt und so stabilisierend wirkt, und die Versuche an den Zuckerlösungen zeigen in der Tat eine Verringerung der Stabilität bei wachsendem μ , d. i. bei wachsendem S . Doch ist die entsprechende Einwirkung wachsender mittlerer Geschwindigkeit im instabilisierenden Sinne nicht zu konstatieren, also eine einfache Dimensionsbetrachtung nicht durchführbar.

Der Grund dafür kann nur darin liegen, daß wir das v der Dimensionsbetrachtung mit dem u der Differentialgleichung identifizierten. Das ist nicht mehr zulässig, sobald an der Oberfläche Wellungen auftreten, und dadurch neue Längen und Geschwindigkeiten ins Spiel kommen.

§ 5. Die Oberflächenwellen auf dem Flusse.

Wie schon eingangs erwähnt, war es eine der verlockendsten Aussichten bei den geschilderten Experimenten, daß die freie Oberfläche eines Flusses etwas von den turbulenten Bewegungen zu zeigen und so einen Einblick in deren Mechanismus (Wellenlänge, Amplitude usw.) zu gestatten versprach. In der Tat schienen die Experimente dieser Erwartung entgegen zu kommen. Bei geringer Ausflußmenge beobachtete man eine ganz glatte Oberfläche, die nur durch kleine zufällige Erhebungen am Rande gestört war; die zurückgeworfenen Bilder wiesen keine merklichen Unregelmäßigkeiten auf. Wurde die Ausflußmenge vergrößert, so zeigten sich regelmäßige stehende

Wellen auf der Oberfläche, deren Kämme, vom Rande ausgehend, zunächst etwa senkrecht zur Stromrichtung verliefen, dann bei weiter gesteigerter Ausflußmenge ihre Neigung gegen die Stromrichtung verkleinerten, bei stets abnehmender Wellenlänge. In

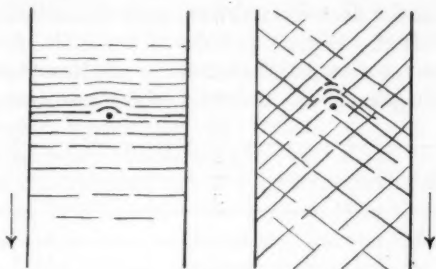
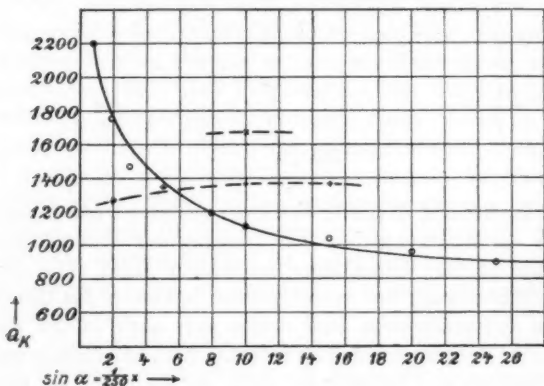


Fig. 17.

Fig. 17 ist das flüchtig skizziert. Von einer gewissen Ausflußmenge an waren die Änderungen in der Neigung der Wellenkämme sowohl, wie in der Wellenlänge unmerklich klein. Die erste sichtbare Wellenlänge war um so größer, je kleiner das Gefälle war. Ein entsprechendes Bild zeigte sich auch in der Umgebung einer Störung an der Oberfläche, z. B. der aufgesetzten Schraubenspitze und (allerdings nicht so deutlich) an einer Störung am Grund des Flusses, einer Luftblase oder dgl. Die Wellen um eine solche Störung waren bei kleiner Oberflächen- geschwindigkeit so stark örtlich gedämpft, d. h. um das Hindernis herum lokalisiert, daß überhaupt nur eine kleine Erhebung der Oberfläche an der Vorderseite des Hindernisses zu sehen war. Bei großer Ausflußmenge dagegen zeigte sich ein schönes Schiffswellengitter, das dem Kapillarwellengitter der reibungs- losen Hydrodynamik im wesentlichen ähnlich war. Der Über- gang der ganz glatten Oberfläche in eine gewellte war natür- lich kein ganz plötzlicher, doch ließ sich der kritische Punkt, an welchem das Aussehen sich sehr schnell veränderte, durch Beobachten einmal des merklichen Erlöschens und einmal des nachweisbaren Einsetzens der Wellen in ziemlich enge Grenzen einschließen. So lag die Vermutung sehr nahe, daß der kritische Punkt, an welchem die Reibung nicht mehr imstande ist, den Trägheitskräften zu widerstehen, sich durch den Einsatz der

Wellen an der Oberfläche kund gebe. Diese Vermutung bestätigte sich aber durchaus nicht. Das zeigte sich am einfachsten darin, daß durch Änderung des Gefälles ein vorhandenes Wellengitter zum Verschwinden gebracht werden konnte, während doch die Reynoldssche Instabilität nicht vom Gefälle abhängt. Fig. 18 gibt davon ein Bild. Als Funktion des Gefälles ist dort die Ausflußmenge pro Minute aufgetragen, in deren Umgebung das Oberflächenbild aus dem glatten in



- Ausflußmenge, bei welcher die Oberflächenwellen merklich werden.
- + Ausflußmenge, bei welcher Wasser turbulent zu fließen beginnt.
- × Ausflußmenge, bei welcher Zuckerlösung I turbulent zu fließen beginnt.

Fig. 18.

den gewellten Zustand übergeht, und zwar gelten diese Punkte ebensowohl für Wasser wie für Zuckerlösung. Dazu sind die Ausflußmengen angegeben, die der kritischen Reynoldsschen Zahl entsprechen. Man sieht, daß die beiden kritischen Werte durchaus voneinander unabhängig sind, daß einestheils die Oberfläche eines Flusses ganz von Wellen durchzogen sein kann, ohne daß doch Formel (3) innerhalb der Fehlergrenze zu gelten aufhört, wie es bei einer Neigung $> 5/250$ der Fall ist, und daß andererseits, wie z. B. bei Wasser vom Gefälle $2/250$, auch im Innern der Flüssigkeit schon starke turbulente Bewegungen vor sich gehen können, ohne daß an der Ober-

fläche das geringste zu sehen wäre. Die Hoffnung, an dem Flusse direkt durch den Augenschein etwas über den Mechanismus der Turbulenz zu erfahren, muß also als gescheitert angesehen werden.¹⁾

Es bot sich nun aber weiterhin das Problem, über die Oberflächenwellen selbst Klarheit zu gewinnen, und ihren möglichen Einfluß auf die im vorigen Paragraphen besprochenen Abweichungen vom Reynoldsschen Gesetz zu untersuchen.

Die exakte Berechnung der Wellen, d. i. der unendlich kleinen periodischen Schwingungen auf einem Flusse mit Reibung, ist ein Problem von sehr großer Schwierigkeit, identisch mit dem Turbulenzproblem selbst, das bisher ja der mathematischen Analyse vollkommen widerstanden hat. Da die Wellen aber keinen direkten Zusammenhang mit der Turbulenz zeigten, schien es mir wahrscheinlich, daß die einfache Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser Aufschluß geben würde. Die vollständige exakte Behandlung dieses Problems mit Berücksichtigung der endlichen Tiefe und der Reibung fand ich nirgends in der Literatur²⁾; ich verweise deshalb auf die Dissertation, Anhang 4.

Von den dort abgeleiteten Resultaten ist hier von Wichtigkeit, daß der Grenzübergang verschwindender Reibung die Formeln der reibungslosen Hydrodynamik liefert, und daß in allen bei Wasser in Betracht kommenden Fällen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen nur durch Schwere und Kapillarität, ihre Dämpfung nur durch die Reibung bestimmt wird.

Wenden wir diese Resultate auf unsern Fluß an, so haben wir das folgende Problem: Gegeben ist die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses an seiner Oberfläche als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Gibt dann der aus der Theorie der Wellen auf ruhendem Wasser gewonnene Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Länge, Dämpfung usw. der Wellen Aufschluß über die beobachteten Phänomene?

1) Über einige hier anknüpfende Experimente über Strahlzuckungen ist in der Dissertation, Anhang 3 referiert.

2) In W. Wiens Hydrodynamik, p. 283, Gleichung (73) sind nur 2 Konstanten eingeführt, anstatt 3, wie die Anzahl der Grenzbedingungen erfordern würde.

Das Nächstliegende ist, von der Reibung abzusehen und an eine Minimalgeschwindigkeit zu denken, wie sie Kelvin bei den Kapillar-Schwere-Wellen nachgewiesen hat. Kelvin hat aber nur eine für unendliche Tiefe gültige Formel aufgestellt; wir müssen zur allgemeinen Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einer Störung von Wellenlänge $2\pi/\alpha$

$$v = \sqrt{\frac{g\varrho + T\alpha^2}{\varrho\alpha}} \quad 2g\alpha h$$

zurückgreifen und das Kelvinsche Kriterium auf den Fall endlicher Tiefe übertragen. Ich will nur das Resultat der Rechnung mitteilen, da es ohne Schwierigkeiten erhalten werden kann. Der Kelvinsche Wert der Minimalgeschwindigkeit

$$v^2 = 2 \sqrt{\frac{Tg}{\varrho}}, \quad \text{also} \quad v = 23,3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gilt nur, wenn

$$h \gg \sqrt{\frac{T}{g\varrho}} = \text{etwa } \frac{1}{3} \text{ cm},$$

was bei obigen Experimenten nie der Fall war.

Die entgegengesetzte Näherung — αh klein — gilt bis etwa dahin (d. h. für den Fall $h \ll 2 \sqrt{T/g\varrho}$) und ergibt eine Minimalgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{gh \left(\frac{2}{3} \frac{g\varrho}{T} h^2 - 1 \right)},$$

also eine fast im ganzen Gültigkeitsbereich imaginäre Größe. Infolgedessen führt der Kelvinsche Weg zu keiner Erklärung unserer Versuchsergebnisse.

Auch die Vermutung, es handle sich um die für alle Wellenphänomene bedeutungsvolle Geschwindigkeit \sqrt{gh} , bestätigte sich nicht. Die Wellen setzten auf dem Flusse erst bei einer Oberflächengeschwindigkeit ein, bei welcher sie ausschließlich unter Wirkung der Kapillarität stehen konnten.

In Fig. 19 ist dies kurz veranschaulicht. Dort ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als Funktion der reziproken Wellenlänge aufgetragen. Man sieht, daß eine Minimalgeschwindigkeit bei kleiner Tiefe h' nicht auftritt. Zur Beobachtung kamen nur Wellen, die ihren Platz im Diagramm auf einer solchen Kurve ohne Minimum bei $v > \sqrt{gh'}$ haben.

Man muß also den Schluß ziehen, daß obige Betrachtungen nicht ausreichen, um über die Beobachtungen der Wellengitter

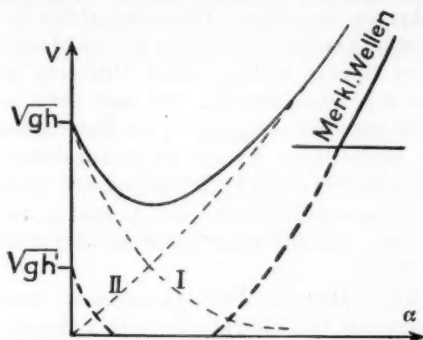


Fig. 19. I Schwerewellen. II Kapillarwellen.

auch nur qualitativ Aufschluß zu geben. Es wird dazu unbedingt nötig sein, das exakte Problem der kleinen Schwingungen auf einem reibenden Flusse zu diskutieren.

§ 6. Zusammenfassung.

Die Resultate der Untersuchung seien schließlich noch übersichtlich zusammengestellt:

1. Es wurde ein Idealfuß von geringer Tiefe hergestellt, in welchem die Strömung nicht mehr, wie bei wirklichen Flüssen „hydraulisch“ vor sich ging, sondern, von der Reibung beherrscht, die einfachen hydrodynamischen Gesetze befolgte.

2. Es bestätigte sich in erster Näherung auch hier, das von anderen Strömungen (in Röhren usw.) her bekannte Reynoldssche Gesetz, wonach absolute Werte der Geschwindigkeit, Tiefe, Reibung usw. für den Verlauf der Strömung nicht maßgebend sind, sondern nur die sogenannte Reynoldssche Zahl

$$R = \frac{\rho v l}{\mu}.$$

Bei kleinem R befolgt die Strömung die einfachen hydrodynamischen Gesetze, d. h. sie verläuft laminar, bei großem R treten die sogenannten turbulenten Bewegungen auf, welche für den „hydraulischen“ Zustand charakteristisch sind. Der

Übergang von einem Zustand in den anderen läßt sich ungezwungen als sprunghaft, d. i. durch einen Knick in den Beobachtungskurven darstellen. Trotz der großen Unsicherheit der Tiefenmessung konnte die kritische Reynoldssche Zahl R_k , bei welcher der Sprung erfolgt, durch Mittelung auf wenige Prozent genau angegeben werden. Sie liegt etwa bei 300.

3. Eine Abhängigkeit der Größe R_k von Material und Rauheitsgrad der Grundfläche konnte nicht konstatiert werden.

4. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen bei Änderung des Gefälles, die gleichbedeutend ist mit einer Änderung der Geschwindigkeit oder der Tiefe.

5. Das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz bewährt sich nicht bei Anwendung von verschieden stark reibenden Flüssigkeiten. Hier wurden Abweichungen bis zu 25 Proz. gefunden, während bei entsprechenden Experimenten an Röhren die Differenz der kritischen Zahlen nur etwa 3 Proz. betrug.

Bei freier Oberfläche erfolgt die Abweichung in der Richtung, daß *ceteris paribus* R_k sinkt mit wachsendem Reibungskoeffizienten.

6. Daß solche Abweichungen auftreten, ist theoretisch leicht verständlich, da durch eine Grenzbedingung an der freien Oberfläche neue, für die Strömung charakteristische Zahlen ins Spiel kommen, welche bei Strömungen zwischen festen Wänden nicht auftreten, besonders durch die den Differentialgleichungen ganz fremde, für die freie Oberfläche aber sehr wichtige Größe der Kapillarität. Warum man das Ähnlichkeitsgesetz mit Rücksicht auf die Kapillarität nicht einwandfrei erweitern kann, wird in § 4 auseinandergesetzt.

7. Die Verhältnisse werden stark kompliziert durch die an der Flußoberfläche auftretenden Wellen. Diese sind vom Turbulenzphänomen ganz unabhängig und verwehren eine direkte Beobachtung der turbulenten Bewegungen durch Augenschein. Die Gesetze, denen sie gehorchen, weichen von den für Wellen auf ruhendem Wasser berechneten erheblich ab.

Zum Schlusse möchte ich mir gestatten, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Sommerfeld meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Anregung zu

dieser Arbeit und für das stete und rege Interesse, das er all meinen Studien entgegenbrachte. Auch seinem Assistenten, Hrn. Dr. Debye, sei herzlichst gedankt für die Bereitwilligkeit, mit der er mir manche Schwierigkeiten überwinden half.

Anhang.

Berechnung der Ausflußmenge eines reibenden Flusses von endlicher Breite.¹⁾

Zu lösen sind Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \mu \Delta u = -\rho g \sin \alpha, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

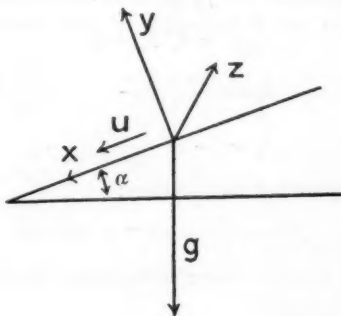


Fig. 3.

Dazu die Grenzbedingungen:

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{für } y = 0, \\ u = 0 & \text{für } z = \pm b, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \text{für } y = h, \\ p = 0 & \text{für } y = h. \end{cases}$$

Für den Druck ergibt sich ohne weiteres:

$$(3) \quad p = \rho g \cos \alpha (h - y).$$

1) Zu p. 781.

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\rho g \sin \alpha}{\mu} = c$$

lösen wir durch einen Ansatz, welcher die Grenzbedingungen an den Seitenwänden erfüllt:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi}{b} (2n+1) \frac{\pi}{2} f_n(y).$$

Die Konstante c können wir über die Flußränder beiderseits hinaus in beliebiger Weise fortsetzen, und wir tun das so, daß wir für c eine Fourierreihe erhalten, deren halbe Periode die Flußbettbreite ist:

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi} \cos(2n+1) \frac{\pi}{b} \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen in (4) ergibt für $f_n(y)$ die Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^2 f_n}{dy^2} - k_n^2 f_n = l_n,$$

wobei

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$$

und

$$l_n = (-1)^n \frac{4c}{(2n+1)\pi}.$$

Daraus bei Weglassung der Indizes:

$$f = -\frac{l}{k^2} + A e^{ky} + B e^{-ky}.$$

Die beiden noch übrigen Grenzbedingungen bestimmen A und B durch die Gleichungen:

$$A + B = \frac{l}{k^2},$$

$$A e^{kh} - B e^{-kh} = 0$$

oder:

$$A = \frac{l}{k^2} \frac{1}{1 + e^{2kh}}, \quad B = \frac{l}{k^2} \frac{e^{2kh}}{1 + e^{2kh}},$$

also:

$$(6) \quad f = \frac{l}{k^2} \left(\frac{\cosh k(y-h)}{\cosh kh} - 1 \right).$$

So erhalten wir schließlich die Geschwindigkeitsverteilung:

$$(7) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{16 b^3 c}{(2n+1)^3 \pi^3} \left(\frac{\cosh \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{y-h}{b} \right\}}{\cosh \left\{ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{h}{b} \right\}} - 1 \right) \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{b}.$$

ein schon von Graetz¹⁾ und von Greenhill²⁾ angegebenes Resultat. Die gesuchte Ausflußmenge wird

$$Q = \int_0^h \int_{-b}^{+b} u \, dy \, dz = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{2b^3 c}{v^3} \left(\frac{b}{v} \mathfrak{I}g \, v \frac{h}{b} - h \right) \frac{2b}{v} (-1)^n,$$

wobei zur Abkürzung $v = (2n + 1) \pi / 2$ gesetzt ist;

$$(8) \quad Q = 4b^4 c \left\{ \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{v^5} \mathfrak{I}g \, v \frac{h}{b} \right) - \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} \frac{1}{v^4} \right\}.$$

Wir haben die Summe auszurechnen:

$$\sum \frac{1}{v^4} = \frac{\pi^4}{96} \cdot \frac{16}{\pi^4} = \frac{1}{6}.$$

Bei der anderen Summe treten Schwierigkeiten auf, denn die Potenzreihenentwicklung des $\mathfrak{I}g$ führt zu nichtkonvergenten Summen; man kann aber in folgender Weise vorgehen³⁾:

$$\mathfrak{I}g \, v \frac{h}{b} = 2v \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} (\mu) \frac{1}{\mu^2 + \frac{v^2 h^2}{b^2}}, \quad \text{wobei} \quad \mu = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

$$= 2v \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} (\mu) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \cos \frac{h}{b} v t \, dt,$$

$$(9) \quad \sum_{(v)} \frac{1}{v^5} \mathfrak{I}g \, v \frac{h}{b} = 2 \frac{h}{b} \sum_0^{\infty} (\mu) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_{(v)} \frac{\cos \frac{h}{b} v t}{v^4} \, dt.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \sum_{(v)} \frac{\cos \frac{h}{b} v t}{v^4} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{b} t \right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{h}{b} t \right)^2 + \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad 0 < t < \frac{2b}{h} \\ &= -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{b} t \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{h}{b} t \right)^2 - \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad \frac{2b}{h} < t < \frac{4b}{h} \end{aligned}$$

usw.,

1) Graetz, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25. 1880.

2) Greenhill, Lond. Math. Soc. Proc. 13. 1881.

3) Vgl. Debye, „Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 54. p. 418. 1906.

wie man leicht durch mehrfache Integration der Identität:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

zwischen den Grenzen Null und x erweisen kann.

Es ist klar, daß bei Ausführung der Integration über t nur die von der Grenze Null herrührenden Glieder in Betracht kommen, da die übrigen mindestens wie $e^{-2\frac{h}{b}}$ verschwinden, d. i. im Falle unserer Experimente rund e^{-50} , also praktisch Null. Es bleibt also übrig:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos v \frac{h}{b} t}{v^4} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\mu^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\mu^4} \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{\mu^5} \left(\frac{h}{b}\right)^4.$$

In (9) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{v^5} \operatorname{Eg} v \frac{h}{b} \\ &= \frac{2h}{b} \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^4 \right\}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (8) erhalten wir schließlich die Ausflußmenge pro Sekunde:

$$Q = -\frac{2}{3} c b h^3 + 0,42 c h^4,$$

da

$$\frac{32}{\pi^5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} = 0,105$$

oder

$$(10) \quad Q = \frac{2}{3} \frac{g \varrho \sin \alpha}{\mu} b h^3 \left(1 - 0,63 \frac{h}{b}\right).$$

München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 18. Februar 1910.)

5. *Ein absolutes Manometer; von Martin Knudsen.*

1. Einleitung.

Bei einer früheren Gelegenheit habe ich nachgewiesen, daß ein Gasmolekül, das gegen eine feste Wand anstößt, in einer Richtung zurückgeworfen wird, die vollständig unabhängig ist von der Richtung, die das sich der Wand nähernde Molekül hatte, und daß eine große Anzahl von Molekülen, die ein Flächenelement einer festen Wand treffen, sich, indem sie zurückgeworfen werden, dem bekannten Cosgesetz gemäß verteilen. Diese nur die Richtungen der Molekularbewegungen betreffenden Gesetze gelten unter der Voraussetzung, daß zwischen dem Gas und der festen Wand ein Temperaturgleichgewicht besteht, so daß die Größen der absoluten Geschwindigkeiten der Moleküle, nachdem diese zurückgeworfen worden sind, durchschnittlich unverändert bleiben und sich ferner nach Maxwells Gesetz verteilen.

Besteht zwischen den anstoßenden Molekülen und der festen Wand kein Temperaturgleichgewicht, so ändern sich die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle durch den Stoß, sowohl was Richtung als was Größe betrifft, und ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, nach welchen Gesetzen diese Veränderungen stattfinden.

In der Erwartung, daß Messungen der Kräfte, die zwischen zwei ungleich warmen Platten wirken, die einander in einem gasverdünnten Raum gegenübergestellt sind, sowie Wärmeleitungsversuche uns darüber aufklären könnten, habe ich eine Reihe von Messungen dieser Kräfte (Radiometerkräfte) ausgeführt und kam dabei auf das Prinzip eines bequemen und äußerst empfindlichen Manometers, das zur Bestimmung des Gesamtdrucks der Gase sowie der gesättigten und ungesättigten Dämpfe verwendet werden kann, die sich in einem Raume

finden, vorausgesetzt, daß der zu messende Gesamtdruck sehr klein ist.

Es haben sich, nachdem Crookes¹⁾ im Jahre 1873 das Radiometer erfand, eine große Anzahl Physiker, um Untersuchungen über die Radiometerwirkung anzustellen, mit diesem Apparat beschäftigt. Es sind zahlreiche Versuche ausgeführt worden mit Apparaten verschiedener Größe und Gestalt; so hat namentlich Crookes selbst eine große Anzahl Versuche ausgeführt und beschrieben. Man benutzte teilweise Apparate der gewöhnlichen, bekannten Mühlenform, aber auch Drehwagen, an denen der bestrahlte Körper angebracht wurde. Der Apparat rief eine reiche Literatur hervor, indem die Versuche und ihre Erklärung zu einer lebhaften Erörterung führten. Bereits 1874 wurde die noch geltende Erklärung aufgestellt, die Bewegung rühre von der Molekularbewegung des Gases im Radiometerballon her, und man versuchte mittels der kinetischen Gastheorie die Größe der wirkenden Kräfte zu berechnen. Zu einem tatsächlichen Zusammenhang zwischen den ausgeführten Berechnungen und den Ergebnissen der Versuche brachte man es aber meines Wissens nicht, wahrscheinlich weil man die durch Bestrahlung in den Radiometern erzeugten Temperaturunterschiede nicht direkt maß, und außerdem war die Bestimmung des Gasdruckes im Radiometerballon in vielen Fällen eine höchst unsichere.

Ogleich es den meisten Physikern nach und nach klar wurde, daß die Erklärung der Radiometerbewegung darin zu suchen sei, daß die Gasmoleküle eine größere Geschwindigkeit erhalten, wenn sie von einer warmen Fläche zurückgeworfen werden, als wenn sie von einer kalten Fläche zurückgeworfen werden, herrschte doch große Unklarheit und Uneinigkeit darüber, wie man die kinetische Theorie im einzelnen auf den vorliegenden Fall anwenden sollte. So sagt Maxwell²⁾ von zwei koaxialen ebenen Scheiben, die verschiedene Temperatur θ haben: „If the bodies are two parallel discs very near to each other, the central parts will produce very little effect, because between the discs the temperature varies uniform, and

1) W. Crookes, Proc. Roy. Soc. 22. p. 37. London 1874.

2) J. C. Maxwell, Phil. Trans. Roy. Soc. London p. 332. 1879.

$d^2\theta/dh^2 = 0$. Only near the edges will there be any stress arising from inequality of temperature in the gas." Einer etwas ähnlichen Ansicht scheint O. E. Meyer gewesen zu sein. Im Gegensatz dazu meinen Stoney¹⁾, Fitzgerald²⁾ u. a., die Abstoßung sei eine Flächenwirkung und nicht nur, wie von Maxwell angenommen, eine Randwirkung.

2. Zusammenfassung meiner im folgenden beschriebenen Untersuchungsergebnisse.

Wie im folgenden dargetan werden soll, ist die mechanische Kraft, mit der das zwischen zwei ungleich warmen Platten befindliche und sie umgebende Gas auf die Platten wirkt, in sehr einfacher Weise vom Gasdruck und der Größe und Temperatur der Platten abhängig, vorausgesetzt, daß der Abstand der Platten verschwindend klein ist im Vergleich mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle. Daraus folgt, daß sich umgekehrt der Druck bestimmen läßt durch eine Messung der zwischen den beiden Platten wirkenden mechanischen Kraft, wenn die Größe und die Temperaturen der Platten bekannt sind.

Die Druckmessung durch ein nach diesem Prinzip konstruiertes Manometer wird unabhängig von der Herstellung eines absoluten Vakuums. Man bestimmt den Gesamtdruck der im Raume befindlichen Gase und Dämpfe und nicht wie durch Mc Leods Manometer nur einen partiellen Druck, und da das neue Manometer zudem in seiner rationellsten Form eine gewisse Ähnlichkeit mit Lord Kelvins absolutem Elektrometer hat, finde ich es natürlich, den Apparat ein absolutes Manometer zu nennen.

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Kraft K , mit der jedes Quadratcentimeter zweier parallelen Platten mit den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 einander abstoßen, mit dem Druck p der in dem umgebenden Raum befindlichen Gase und Dämpfe durch folgende Gleichung

$$(1) \quad p = \frac{2K}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1}$$

1) G. J. Stoney, Se. Trans. Roy. Dublin Soc. (2) 1. p. 39. 1878.

2) M. F. Fitzgerald, Phil. Mag. (5) 7. p. 15. 1879.

verbunden ist, wo die Größen p und K in denselben Einheiten z. B. Dyn/cm² angegeben werden. Bei kleinen Temperaturunterschieden ändert sich die Formel in

$$(2) \quad p = 4 K \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Diese Gleichungen sind aus der durch gewisse Hypothesen ergänzten kinetischen Gastheorie hergeleitet und haben sich als richtig bewährt mit den mit Wasserstoff, Sauerstoff, Kohlensäure und Quecksilberdampf ausgeführten Versuchen bei Drucken, die niedriger sind als etwa $\frac{1}{300}$ mm Quecksilberdruck oder 4—5 Dyn/cm².

Die Richtigkeit der Formel (2) läßt sich in folgender Weise dartun: Wie ich früher gezeigt habe¹⁾, wird der Druck in einer Gasmasse, die in einem Behälter eingeschlossen ist, dessen Dimensionen verschwindend klein sind im Vergleich mit der mittleren Weglänge, im Gleichgewichtszustande an jedem Orte der Quadratwurzel der absoluten Temperatur des Gases proportional sein. Die Temperatur des die beiden ungleich warmen Platten umgebenden Gases wird zu T_2 angesetzt. Ist der Temperaturunterschied der Platten nur gering im Vergleich mit den absoluten Temperaturen, so ist nicht anzunehmen, daß die Temperatur des Gases zwischen den Platten von $(T_1 + T_2)/2$ wesentlich verschieden ist, und der Gasdruck K' zwischen den Platten ist damit angegeben durch die Gleichung

$$\frac{K'}{p} = \sqrt{\frac{T_1 + T_2}{2 T_2}},$$

die, da T_1 und T_2 fast gleich groß sind, als

$$\frac{K'}{p} = 1 + \frac{T_1 - T_2}{4 T_2}$$

geschrieben werden kann. Die auf jedes Quadratzentimeter der beweglichen Platte wirkende Kraft K ist gleich $K' - p$, und somit ist, in Übereinstimmung mit der Gleichung (2)

$$K = p \cdot \frac{T_1 - T_2}{4 T_2}.$$

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 31. p. 633. 1910.

Der Versuchsaппarat bestand in seiner rationellsten Form aus einer auf einer Unterlage fest aufgestellten, senkrechten Metallplatte, die elektrisch erwärmt werden konnte. Der Rand der Metallplatte war von einem Schutzring umgeben, dessen Temperatur der der übrigen Umgebungen möglichst gleich gehalten wurde. Der warmen Metallplatte parallel wurde eine bewegliche Metallplatte angebracht, die den einen Arm einer Drehwaage ausmachte, an der die durch die Erwärmung erzeugte abstoßende Kraft zwischen den Platten gemessen werden konnte. Die Temperaturen der erwärmten Platte, des Schutzringes sowie seiner Umgebungen und der schwingenden Platte wurden mittels Quecksilbertermometer gemessen. Übrigens kann der Apparat verschiedene Formen haben je nach dem Zwecke, dem er dienen soll, so kann man z. B. auch eine dem Quadrantenelektrometer entsprechende Form verwenden.

Von den verschiedenen Manometerkonstruktionen, mit denen ich Versuche ausgeführt habe, hat namentlich eine, die ich am Schlusse dieses Aufsatzes beschreiben werde, sich als leicht herstellbar, transportabel und in der Benutzung äußerst bequem erwiesen. Der Temperaturunterschied wurde hervorgerufen durch Änderung der Temperatur eines Wasserbades, in welchem das Manometer angebracht war, und die Empfindlichkeit konnte nach Belieben variiert werden. Dieser Apparat ergab durch Spiegelablesung für einen Druck von $0,485 \text{ Dyn/cm}^2$ und Temperaturdifferenz 37° einen Ausschlag von 226 mm (Skalenentfernung 1,25 m, Schwingungsdauer ca. 1,8 Sek.). Jedem Millimeter Ausschlag entspricht also ein Druck von etwa $0,002 \text{ Dyn/cm}^2$ oder $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm Quecksilberdruck}$, und nichts hindert eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit durch Benutzung eines größeren Temperaturunterschiedes und einer geringeren Direktionskraft der beweglichen Platte.

Bei höheren Drucken als einige Tausendstel Millimeter Quecksilberdruck ist der Apparat nicht als absolutes Manometer anwendbar, da hier kompliziertere Formeln gelten, deren Grenzwerte die oben angeführten Formeln sind. Setzt man

$$(3) \quad p = c \frac{2K}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2} - 1}},$$

so wird, wie bereits angeführt, c gegen 1 konvergieren, wenn

der Druck gegen 0 konvergiert. Bei wachsendem Druck wächst die Größe c exponentiell, sie ist bei gleichem Druck kleiner für Wasserstoff, als für Sauerstoff, Stickstoff und Kohlensäure, sie variiert mit dem Abstand zwischen den Platten und möglicherweise mit den Temperaturen, jedenfalls aber in keinem beträchtlichen Grade. Was den Sauerstoff betrifft, scheinen noch andere Kräfte hinzuzukommen, so daß sich die Verhältnisse komplizierter gestalten.

Der experimentelle Beweis für die Gültigkeit der Formel (1) wurde dadurch erschwert, daß die Formel (3) bei abnehmenden Werten des Druckes p langsamer gegen Formel (1) konvergiert, als ich von Anfang an erwartet hatte, und daß das Messungsgebiet des absoluten Manometers erst bei so niedrigen Drucken beginnt, daß andere Druckmessungsapparate sich schwerlich zu einem direkten Vergleich anwenden lassen. *Dafür kann aber die Empfindlichkeit des absoluten Manometers so groß werden, daß man wahrscheinlich in allen Fällen dazu imstande sein wird, so kleine Drücke genau zu messen, wie man sie erzeugen kann.*

Der Gang der experimentellen Beweisführung war folgender:

1. Bei gewöhnlicher Temperatur war die Angabe des absoluten Manometers bis auf geringen Unterschied gleich der Summe des an Mc Leods Manometer gemessenen Druckes der permanenten Gase und des Druckes gesättigter Quecksilberdämpfe bei der herrschenden Temperatur. Diese Übereinstimmung konnte aber nicht als entscheidende betrachtet werden, da die Temperatur in dem zuerst benutzten umfangreichen Apparat nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt werden konnte.

2. Der Druck der permanenten Gase im Apparat wurde variiert. Diese Veränderungen wurden teils an Mc Leods Manometer, teils durch das Mariottesche Gesetz gemessen, indem abgemessene, kleine Gasmengen in den Apparat hineingeleitet wurden. Dadurch änderte sich die Angabe des absoluten Manometers genau wie der erzeugten, angegebenenmaßen gemessenen Druckänderung. Versuche wurden ausgeführt mit Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlensäure.

3. Im Glasbehälter des Manometers wurde ein wenig Quecksilber angebracht, und die Luft wurde stark ausgepumpt. Durch Abkühlung eines Teiles der Glaswand auf verschiedene

Temperaturen zeigte sich, daß die Angabe des absoluten Manometers sich genau um so viel verminderte, wie der Druck gesättigter Quecksilberdämpfe durch die stattgefundene Abkühlung vermindert wird.

Da sich die Formel (1) bei kleinen Drucken als richtig ergeben hat, ist dasselbe wahrscheinlich der Fall mit den Voraussetzungen, auf denen sie beruht. Diese Voraussetzungen sind in bezug auf die Zurückwerfung der Gasmoleküle von einer festen Wand folgende:

1. Die für die Zurückwerfungsrichtungen geltenden Gesetze sind in allen Fällen die in der Einleitung angeführten, auch wenn die Gasmasse nicht mit der festen Wand in Temperaturgleichgewicht ist.

2. Die Formel (1) läßt sich unter der Voraussetzung aufstellen, daß Moleküle, die von einer Gasmasse kommen, die nicht in Temperaturgleichgewicht mit einem festen (flüssigen) Körper ist, indem sie von diesem Körper zurückgeworfen wird, Geschwindigkeiten erhält, die genau dieselben sind, als wären die Moleküle von einer Gasmasse gekommen, die mit dem festen Körper in Temperaturgleichgewicht wäre. Diese Annahme ist indessen keine notwendige Bedingung für die Aufstellung von Gleichung (1), die uns nur über folgendes aufklärt:

Hat man zwei parallele Platten, die einander so nahe aufgestellt sind, daß ihr Abstand verschwindend klein ist im Vergleich mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle, und haben die Platten solche Temperaturen, daß die Gasmoleküle die mittlere Geschwindigkeit Ω_1' haben müßten, um mit der einen von ihnen in Temperaturgleichgewicht zu sein, und die mittlere Geschwindigkeit Ω_2' , um es mit der anderen zu sein, so werden die mittleren Geschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 , welche die Gasmoleküle tatsächlich erhalten, indem sie gegen jede Platte anstoßen, so beschaffen sein, daß

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_1' + \Omega_2'.$$

Daß diese Gleichung bei kleinen Temperaturdifferenzen befriedigt werden muß, ist durch eine theoretische Betrachtung ersichtlich. Die Versuche zeigen, daß sie auch bei großen Temperaturdifferenzen jedenfalls annäherungsweise befriedigt wird. Die Gleichung wird befriedigt sein, wenn $\Omega_1 = \Omega_1'$

und $\Omega_2 = \Omega_2'$, aber von der Richtigkeit dieser beiden Gleichungen sagen die beschriebenen Versuche nichts. Eine Reihe von Messungen, die ich zur Aufklärung des Wärmeleitungsvermögens der Gase bei niedrigen Drucken angestellt habe, scheint zu zeigen, daß man, was den Wasserstoff betrifft, $\Omega_1 = \Omega_1'$ und $\Omega_2 = \Omega_2'$ nicht setzen kann, und dasselbe läßt sich aus Smoluchowskis¹⁾ Messungen schließen.

3. Die Theorie des absoluten Manometers.

Es seien in Fig. 1 A_1 und A_2 die gegeneinander kehrenden Oberflächen zweier parallelen Platten, deren Temperatur verschieden ist. Nehmen wir außerdem an, daß der Abstand

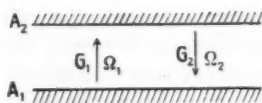


Fig. 1.

der Platten verschwindend klein ist im Vergleich mit der Größe der Platten und im Vergleich mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle, die sich zwischen ihnen befinden. Hat die Platte A_1 eine höhere Temperatur als die Platte A_2 ,

werden infolge der kinetischen Gastheorie die Gasmoleküle, welche die Platte A_1 verlassen, eine mittlere Geschwindigkeit Ω_1 haben, die größer ist als die mittlere Geschwindigkeit Ω_2 , mit der die Gasmoleküle die Platte A_2 verlassen, denn, wenn dies nicht der Fall wäre, ließe sich die Wärmeleitung von einem festen Körper zu einem anderen durch das Gas schwerlich durch die kinetische Gastheorie erklären.

Finden sich in jedem Kubikzentimeter des Raumes zwischen den Platten N_1 Moleküle mit von A_1 gegen A_2 gerichteten Geschwindigkeitskomponenten, und ist der mittlere Wert der Geschwindigkeiten dieser Moleküle Ω_1 und der der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten G_1^2 , und finden sich in jedem Kubikzentimeter N_2 Moleküle mit Geschwindigkeitskomponenten entgegengesetzter Richtung, und ist der mittlere Wert der Geschwindigkeiten dieser Moleküle Ω_2 und der der Quadrate ihrer Geschwindigkeiten G_2^2 , so kann man die Kraft, mit der das Gas auf jede Flächeneinheit der beiden Platten wirkt, durch folgende Betrachtung ausfindig machen.

1) M. Smoluchowski, Wied. Ann. 64. p. 101. 1898.

Denken wir uns die N_2 Moleküle mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat G_2^2 durch N_1 Moleküle mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat G_1^2 ersetzt, so finden sich also in jedem Kubikzentimeter $2 N_1$ Moleküle mit gleichmäßig in allen Richtungen verteilten Geschwindigkeiten, und jede Oberflächeneinheit der Platte A_3 wird deshalb in der Sekunde die Bewegungsgröße $\frac{1}{3} \cdot 2 N_1 m G_1^2$ empfangen, indem m die Masse jedes Moleküls bezeichnet. Die Hälfte dieser Bewegungsgröße, also $\frac{1}{3} N_1 m G_1^2$, wird von der Platte empfangen, während die Moleküle durch den Stoß ihre Geschwindigkeit verlieren; die andere Hälfte wird aber empfangen, während die Moleküle durch den Stoß eine neue Geschwindigkeit erhalten, die durchschnittlich der ursprünglichen gleich ist. Alle die neuen N_1 Moleküle, die wir uns statt der N_2 Moleküle eingeführt dachten, haben indessen Bewegungen mit Richtungen von der Platte A_2 hinweg und können somit derselben keine Bewegungsgröße geben. Somit empfängt jede Oberflächeneinheit der Platte A_3 , wenn wir zur ursprünglichen Geschwindigkeitsverteilung zurückkehren, in der Sekunde die Bewegungsgröße $\frac{1}{3} N_1 m G_1^2$, indem sich in jedem Kubikzentimeter N_1 Moleküle mit gegen die Platte gerichteter Bewegung finden, und indem diese Moleküle während des ersten Teiles des Stoßes ihre Bewegung vollständig verlieren. Übrig ist nun noch zu berechnen, wie groß die Bewegungsgröße ist, welche die Platte während des letzten Teiles des Stoßes empfängt, während die Platte A_1 den Molekülen ein mittleres Geschwindigkeitsquadrat G_2^2 erteilt. Diese Bewegungsgröße wird von den Molekülen auf die Platte A_1 übertragen, wo sie völlig abgegeben wird, während die Moleküle ihre Geschwindigkeit beim Anstoßen gegen die Platte (dem ersten Teil des Stoßes gegen A_2) verlieren, weshalb es sich durch ein ähnliches Raisonement wie das bereits angewendete ergibt, daß diese Bewegungsgröße $\frac{1}{3} N_2 m G_2^2$ beträgt. Die gesamte Bewegungsgröße, die jede Oberflächeneinheit jeder der Platten von sämtlichen Gasmolekülen zwischen den Platten empfängt oder der Gasdruck K' an den inneren Seiten der Platten ist somit

$$(4) \quad K' = \frac{1}{3} m (N_1 G_1^2 + N_2 G_2^2).$$

Dasselbe Resultat erhält man durch eine direktere Berechnung

von den Voraussetzungen aus, auf denen die kinetische Theorie beruht.

Man wird bemerken, daß die Energie E' , welche die Gasmoleküle in jedem Kubikzentimeter wegen ihrer translatorischen Bewegung besitzen, gleich $\frac{1}{2} N_1 m G_1^2 + \frac{1}{2} N_2 m G_2^2$ ist, so daß also hier, wie in einer Gasmasse mit konstanter Temperatur, $K' = \frac{2}{3} E'$ ist. Aus dieser Gleichung sieht man, daß K' unter diesen Voraussetzungen in allen Richtungen den gleichen Wert hat, und dasselbe erhellt übrigens auch aus einer direkteren Betrachtung, die derjenigen analog ist, die zur Gleichung (4) führte. Der Druck des Gases zwischen den Platten ist also gleich groß senkrecht auf die Platten wie ihrer Oberfläche parallel, und man kann also rücksichtlich des Druckes von keiner Art Polarisation reden, wie man es früher so häufig tat. Man kann dagegen sagen, daß der Druck im Gase zwischen den Platten, einen anderen Wert hat als der Druck im Gase außerhalb der Platten, wenn die beiden Gasmassen in der Weise im Gleichgewicht sind, daß die Gewichtsmenge Gas, die sich in jedem Raumelement zwischen den Platten und außerhalb derselben findet, sich nicht mehr ändert. Dies stimmt völlig mit dem überein, was ich früher gezeigt habe.¹⁾

Die Anzahlen N_1 und N_2 müssen umgekehrt proportional sein mit den mittleren Geschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 dieser Moleküle, also hat man

$$(5) \quad N_1 \Omega_1 = N_2 \Omega_2,$$

was dasselbe bedeutet wie: jede Oberflächeneinheit der beiden Platten empfängt in jeder Sekunde gleich viel Stöße.

Um zu finden, welche Anzahl von Stößen die Oberflächeneinheit der Platte A_2 in jeder Sekunde empfängt, sehen wir ganz von den Molekülen ab, die sich von dieser Platte hinweg bewegen, und berücksichtigen nur die Moleküle, von denen sich in jedem Kubikzentimeter N_1 finden. Denken wir uns also N_1 Moleküle mit der mittleren Geschwindigkeit Ω_1 statt der N_2 Moleküle in jeden Kubikzentimeter eingeführt, und denken wir uns diese Veränderung so ausgeführt, daß jede Bewegungsrichtung gleich häufig wird, so haben wir in jedem

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 31. p. 205 und p. 633. 1910.

Kubikzentimeter $2 N_1$ Moleküle, und in dem Falle wird, wie ich früher gezeigt habe¹⁾, jede Oberflächeneinheit einer festen Wand $\frac{1}{2} 2 N_1 \Omega_1$ Stöße in der Sekunde empfangen, also dieselbe Anzahl Stöße, die jede Oberflächeneinheit der Platte A_2 in der Sekunde empfängt. In ähnlicher Weise sieht man, daß jede Oberflächeneinheit der Platte A_1 in der Sekunde $\frac{1}{2} 2 N_2 \Omega_2$ Stöße empfängt. Da jedes einzelne Molekül abwechselnd gegen die beiden Platten stößt, empfängt jede Oberflächeneinheit jeder Platte in der Sekunde gleich viel Stöße, und also ist $N_1 \Omega_1 = N_2 \Omega_2$.

Da es dieselben Moleküle sind, die zwischen den beiden Platten hin und her wandern, und da sie längere Zeit gebrauchen, um den Zwischenraum in der einen Richtung zu durchmessen als in der entgegengesetzten, so ist es auch unmittelbar einleuchtend, daß die beiden Anzahlen proportional sind mit den Zeiten, in denen der Zwischenraum durchschnittlich durchmessen wird, oder umgekehrt wie die mittleren Geschwindigkeiten.

Die Größe $N_1 m \Omega_1 - N_2 m \Omega_2$ ist proportional der Resultante der Bewegungsgrößen sämtlicher Moleküle im Zwischenraum zwischen den beiden Platten, und da für die Gasmasse als Ganzes ein Ruhestand vorausgesetzt wird, muß diese Resultante Null sein und somit $N_1 m \Omega_1 = N_2 m \Omega_2$ sein, was auch das angeführte Verhältnis zwischen den Anzahlen und den mittleren Geschwindigkeiten ergibt.

Wir wollen nun annehmen, daß die beiden Platten A_1 und A_2 sich in einer Gasmasse befinden, die aus Molekülen derselben Art besteht wie die sich zwischen den Platten befindenden, und daß das Gas zwischen den Platten an deren Rändern mit dem umgebenden Gas in ungehinderter Verbindung steht. Eine durch die Plattenränder gelegte Fläche wird dann von Gasmolekülen durchströmt werden. Finden sich in jedem Kubikzentimeter des umgebenden Gases N Moleküle mit der mittleren Geschwindigkeit Ω und dem Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrats G^2 , werden in jeder Sekunde durch jedes Quadratzentimeter der Grenzfläche $\frac{1}{4} N \Omega$ Moleküle in den Zwischenraum hineinströmen, während eine gewisse

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 109. 1909.

von N_1 und N_2 und den Geschwindigkeiten dieser Moleküle abhängige Anzahl den Zwischenraum verläßt. Die Anzahl der Moleküle im Zwischenraum muß dadurch vermehrt oder vermindert werden, bis in jeder Sekunde gleich viel Moleküle durch die Grenzfläche ein- und auswandern. Dann wird der stationäre Zustand erreicht sein.

Um die Anzahl Moleküle zu finden, die in der Zeiteinheit den Zwischenraum zwischen den Platten verlassen, wollen wir uns N_1 neue Moleküle in jedes Kubikzentimeter eingeführt denken und annehmen, daß ihre Geschwindigkeiten gleich groß sind und eine der Richtung der ursprünglich vorhandenen N_1 Moleküle entgegengesetzte Richtung haben. In ähnlicher Weise werden auch N_2 neue Moleküle eingeführt, die gleich große und der Richtung der ursprünglichen N_2 Moleküle entgegengesetzte Geschwindigkeiten haben. Jedes Kubikzentimeter des Zwischenraumes enthält jetzt also $2N_1 + 2N_2$ Moleküle mit nach allen Richtungen hin gleichmäßig verteilten Geschwindigkeiten. Jedes Quadratcentimeter der Grenzfläche wird somit von $\frac{1}{4} 2N_1 \Omega_1$ Molekülen ersterer Art und von $\frac{1}{4} 2N_2 \Omega_2$ Molekülen letzterer Art, also im ganzen von $\frac{1}{2}(N_1 \Omega_1 + N_2 \Omega_2)$ Molekülen in der Sekunde durchströmt. Dies aber unter der Voraussetzung, daß die Molekülenzahl doppelt so groß war als der Fall ist, weshalb die gesuchte Anzahl Moleküle, die tatsächlich in jeder Sekunde den Zwischenraum verläßt und durch jedes Quadratcentimeter der Grenzfläche wandert, $\frac{1}{4}(N_1 \Omega_1 + N_2 \Omega_2)$ ist. Als für den stationären Zustand geltend hat man also

$$\frac{1}{4} N \Omega = \frac{1}{4} (N_1 \Omega_1 + N_2 \Omega_2),$$

was durch (5)

$$(6) \quad N_1 \Omega_1 = N_2 \Omega_2 = \frac{1}{2} N \Omega$$

ergibt. Wir wollen annehmen, daß die warme Platte A_1 fest steht, während A_2 beweglich ist und den einen Arm einer Drehwage bildet. Nehmen wir außerdem an, daß die bewegliche Platte dieselbe Temperatur hat wie das umgebende Gas, so wird dessen Druck p , d. h. die zu findende Größe, durch

$$p = \frac{1}{3} N m G^2$$

bestimmt sein. Auf die innere Seite der Platte A_2 wirkt der

Druck K' , auf die äußere der Druck p , und die resultierende Kraft K pro Flächeneinheit der Platte ist

$$K = K' - p = p \left(\frac{K'}{p} - 1 \right)$$

oder mit Benutzung von (4)

$$K = p \left[\frac{N_1 G_1^2 + N_2 G_2^2}{N G^2} - 1 \right],$$

was mit Benutzung von (6)

$$K = p \left(\frac{1}{2} \frac{\frac{G_1^2}{\Omega_1} + \frac{G_2^2}{\Omega_2}}{\frac{G^2}{\Omega}} - 1 \right)$$

ergibt.

Die beiden Größen G und Ω sind infolge des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes durch die Gleichung

$$\frac{G}{\Omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}$$

verbunden. Ob dies Verhältnis in allen Fällen genau gleich G_1/Ω_1 und G_2/Ω_2 ist, läßt sich nicht a priori entscheiden. Ist der Temperaturunterschied zwischen den beiden Platten nur gering, so daß G_1 und G_2 nahezu gleich G , und Ω_1 und Ω_2 nahezu gleich Ω sind, darf man mit Sicherheit annehmen, daß sowohl G_1/Ω_1 wie G_2/Ω_2 gegen G/Ω konvergieren. Denn der Temperaturunterschied kann so klein gemacht werden, daß er, wenn man auch alle Moleküle im Zwischenraum zusammen betrachtet, keine merkbare Abweichung vom Maxwell'schen Gesetz hervorbringen kann, und noch weniger, wenn man jede der beiden Geschwindigkeitsgruppen für sich betrachtet.

Für kleine Temperaturunterschiede erhält man also, indem

$$\frac{G}{\Omega} = \frac{G_1}{\Omega_1} = \frac{G_2}{\Omega_2}$$

$$(7) \quad K = p \left(\frac{1}{2} \frac{G_1 + G_2}{G} - 1 \right) = p \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega} - 1 \right).$$

In dieser Formel sind die Größen G_1 und G_2 durch die Temperaturen T_1 und T_2 der beiden Platten A_1 und A_2 bestimmt. Ob G_1 dem Werte G_1' gleich ist, den diese Größe annehmen würde, wenn die ganze Gasmasse in Temperatur-

gleichgewicht mit der Platte A_1 wäre, läßt sich a priori nicht entscheiden, denn die Geschwindigkeit, mit der ein Molekül eine feste Wand verläßt, könnte man sich wohl nicht nur von der Temperatur der Wand, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängig denken, mit der das Molekül sich der Wand nähert. Ist G_2' der Wert, den G_2 annimmt, wenn die ganze Gasmasse mit der Platte A_2 in Temperaturgleichgewicht ist, besteht also die Möglichkeit, daß $G_1 = G_1'$ und $G_2 = G_2'$ ist, aber auch die Möglichkeit, daß $G_1' > G_1 > G_2 > G_2'$ sein kann. Es hätten natürlich ebensogut die entsprechenden Ausdrücke der mittleren Geschwindigkeiten angeführt werden können.

Andere Möglichkeiten als die hier angeführten gibt es nicht, denn wir setzten voraus, daß die Platte A_1 eine höhere Temperatur hat als die Platte A_2 , und ein Gas, das mit der Platte A_1 in Temperaturgleichgewicht ist, muß somit auch eine höhere Temperatur oder ein größeres G_1' haben als dasselbe Gas, wenn es mit der kälteren Platte A_2 in Temperaturgleichgewicht ist. Es muß also $G_1 > G_2$ sein, denn wenn $G_1 = G_2$ wäre, würde keine Wärme durch die Gasschicht geleitet werden können, und wenn $G_1 < G_2$ wäre, würde die Wärme von dem kalten Körper durch die Gasschicht dem wärmeren zugeführt werden können. Es müßte $G_1' = G_1$ und $G_2' = G_2$ sein, wenn die Geschwindigkeit, mit der ein Molekül eine feste Wand verläßt, vollständig unabhängig ist von der Geschwindigkeit, mit der es sich der Wand nähert, und in dem Falle würden die oben benützten Gleichungen

$$\frac{G}{\Omega} = \frac{G_1}{\Omega_1} = \frac{G_2}{\Omega_2}$$

auch bei großen Temperaturunterschieden befriedigt werden.

Nehmen wir an, daß die Geschwindigkeit, mit der ein Molekül eine feste Wand verläßt, sowohl von der Temperatur der Wand als von der Geschwindigkeit, mit der das Molekül sich der Wand nähert, abhängig ist, muß die Abhängigkeit notwendigerweise eine solche sein, daß G_1 , welche Größe als Funktion von G_1' und G_2 vorausgesetzt wird, gegen G_1' konvergiert, wenn G_2 dies tut. Diese Bedingung wird befriedigt sein, wenn man z. B.

$$G_1 = G_2 + a(G_1' - G_2)$$

setzt; analog muß dann

$$G_2 = G_1 + a(G_2' - G_1)$$

sich sein, was durch Addition

$$G_1 + G_2 = G_1' + G_2'$$

als für alle Werte von G_1 und G_2 gültig ergibt.

Indem wir uns nun erinnern, daß die Gasmasse, welche die Platten umgibt, als mit der Platte A_2 in Temperaturgleichgewicht seiend vorausgesetzt worden ist, hat man also $G = G_2'$, und ersetzt man außerdem $G_1 + G_2$ durch $G_1' + G_2'$, so erhält man aus (7)

$$K = \frac{p}{2} \left(\frac{G_1'}{G_2'} - 1 \right) = \frac{p}{2} \left(\frac{\Omega_1'}{\Omega_2'} - 1 \right).$$

Man hat aber

$$\frac{G_1'}{G_2'} = \frac{\Omega_1'}{\Omega_2'} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

wo T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen der beiden Platten bezeichnen, so daß die Gleichung zu

$$(8) \quad K = \frac{p}{2} \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 \right) \quad \text{oder} \quad p = \frac{2K}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1} \text{ Dyn/cm}^2$$

wird, was für kleine Temperaturunterschiede annäherungsweise in

$$(9) \quad K = \frac{p}{4} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad \text{oder} \quad p = 4K \frac{T_2}{T_1 - T_2} \text{ Dyn/cm}^2$$

übergeht.

4. Experimentelle Bestimmung der Abhängigkeit der Kraft von den Temperaturen.

In dem zuerst benutzten Apparat bestand die warme Platte A_1 (Fig. 2) aus einem senkrechten Streifen Platinblech. Die Länge (Höhe) des Streifens betrug ca. 10 cm, seine Breite ca. 1 cm und seine Dicke ca. 0,00025 cm. Die Platte A_2 bestand aus Platin und

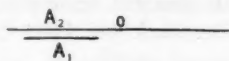


Fig. 2.

hatte die Dimensionen $10 \times 4,3 \times 0,01 \text{ cm}^3$; sie war mit einem kleinen Spiegel zur Fernrohrablesung versehen und an einem ca. 2,5 cm langen und 0,1 mm dicken Platindraht o aufgehängt. Das Trägheitsmoment der schwingenden Platte war $15,03 \text{ g-cm}^2$, ihre Schwingungszeit 1,902 Sek. (ganze Schwingungen), Platinblatt und Platinplatte deckten einander auf $9,75 \text{ cm}^2$ und der Abstand von der Mitte des Platinblattes A_1 bis zur Umdrehungsachse der Platinplatte o (Arm der Kraft) war 1,145 cm. Der Platinstreifen wurde elektrisch erwärmt, seine Temperatur wurde während des Durchganges des Stromes durch eine Messung des Widerstandes des Platinblattes gemessen, indem das Platinblatt die eine Seite einer Wheatstoneschen Brücke bildete, durch die der Erwärmungsstrom hindurchgeleitet werden konnte, ohne eine merkbare Erwärmung der Vergleichswiderstände zu erzeugen. Der Temperaturkoeffizient des Platinblattes wurde durch Erwärmung des ganzen Apparates empirisch bestimmt.

Das Platinblatt A_1 war an einem senkrechten Ständer angebracht, an dem auch die bewegliche Platinplatte A_2 aufgehängt war. Der Ständer war auf einer wagerechten Metallplatte befestigt, die einer über dem ganzen Apparat angebrachten Luftpumpenglocke als Teller diente. Von der Luftpumpenglocke führte eine Glasröhre zu einer Gaedeschen Quecksilberpumpe und einem Mc Leodschen Manometer der früher beschriebenen Einrichtung.¹⁾

Wurde die Luft im Apparat bis auf ca. 4 cm Quecksilberdruck verdünnt, erzeugte eine Erwärmung des Platinstreifens keinen Ausschlag; wurde die Luft noch mehr verdünnt, erhielt man einen Ausschlag, dessen Größe bei zunehmender Erwärmung zunahm, und die bei gegebenem Temperaturunterschied zwischen Platinplatte und Platinblatt bei abnehmendem Druck zunahm, bis der Ausschlag ein Maximum erreichte und sodann bei ferner abnehmendem Druck abnahm. Der Ausschlag wurde durch Spiegelablesung mit Fernrohr bestimmt. Als Beispiel einer solchen Bestimmung kann angeführt werden, daß man bei einer Wasserstofffüllung von ca. 0,035 mm Quecksilberdruck bei 100° Temperaturunterschied zwischen Platin-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 81. 1909.

platte und Platinblatt einen Ausschlag von ca. 28 cm mit 100 cm Skalenabstand hatte.

Mit dem hier beschriebenen Apparat habe ich eine große Anzahl von Messungen mit atmosphärischer Luft, Sauerstoff, Wasserstoff oder Kohlensäure ausgeführt. Aus den gefundenen Ausschlägen wurde in bekannter Weise die abstoßende Kraft berechnet, die zwischen jedem Quadratcentimeter der wirkenden Oberflächen des Platinblattes und der Platinplatte wirkt. Die in der Weise bei verschiedenen Drucken (Gaugenmessungen) und verschiedenen Temperaturen gefundenen Werte von K wurden nebst Drucken und Temperaturen in die Formeln (8) und (9) eingesetzt, um ihre Richtigkeit zu prüfen. Als Beispiel einer solchen Messungsreihe soll hier folgende angeführt werden, die bei einem Abstand von 0,55 mm zwischen Platinblatt und Platinplatte in atmosphärischer Luft ausgeführt wurde. In dieser Messungsreihe war der größte Ausschlag kleiner als 3 cm, so daß der Abstand zwischen Platte und Blatt während der Messungen sich nicht besonders änderte. Die folgende Tabelle enthält in den mit T_1 anfangenden Zeilen die durch Widerstandsmessung bestimmte Temperatur des Platinblattes, in den mit T_2 anfangenden die Temperatur der Platinplatte und in den mit p anfangenden die aus dem Ausschlag und den beobachteten Temperaturen durch die Formel (8) berechneten Werte des Druckes. Der Druck wurde während der Messungen möglichst konstant gehalten.

T_1	31,7	73,3	118,9	155,5	198,5	233,0
T_2	23,4	23,5	23,7	24,1	24,7	25,6
p Dyn/cm ²	2,31	2,39	2,45	2,32	2,27	2,20
T_1	252,0	274,5	299,5	328,9	351,9	376,2
T_2	26,7	28,0	29,6	31,7	34,2	37,2
p Dyn/cm ²	2,19	2,21	2,20	2,23	2,27	2,31

Aus der Tabelle sieht man, daß der gefundene Wert von p sich, bei stufenweise zunehmendem Temperaturunterschied von ca. 8° bis auf 340°, recht konstant hält, was darauf deutet, daß die in der Formel (8) angegebene Temperaturabhängigkeit die richtige ist.

Nimmt man den mittleren Wert der gefundenen Druckwerte, so erhält man 2,28 Dyn/cm². Der an McLeod's Mano-

meter (atmosphärische Luft) gemessene Druck war $0,20 \text{ Dyn/cm}^2$. Hierzu muß aber der Druck gesättigter Quecksilberdämpfe addiert werden, der bei einer Versuchstemperatur von ca. 23° $2,04 \text{ Dyn/cm}^2$ ausmacht.¹⁾ Man hat somit $2,24 \text{ Dyn/cm}^2$, was mit dem durch den neuen Apparat gefundenen Druck von $2,28 \text{ Dyn/cm}^2$ gut übereinstimmt.

Um die Übereinstimmung bei höheren Drucken (atmosphärische Luft) zu veranschaulichen, führen wir folgende Reihe an:

T_1	24,7	36,9	54,8	74,0	96,8
T_2	22,4	22,5	22,8	23,2	23,8
$p \text{ Dyn/cm}^2$	12,49	12,68	12,58	12,45	12,47
T_1	135,1	155,1	180,0	209,3	246,1
T_2	24,8	26,0	27,5	29,3	31,7
$p \text{ Dyn/cm}^2$	12,43	12,32	12,22	12,02	11,92

Auch hier ist der in der mit p anfangenden Zeile angeführte Wert ziemlich konstant während der stufenweisen Zunahme der Temperaturdifferenz bis auf gut 200° .

Bei der größten Temperaturdifferenz war der Ausschlag ca. 27 cm, was der durchschnittlichen Vergrößerung des Abstandes zwischen Platinblatt und Platinplatte um 1,4 mm entspricht.

Der mittlere Wert der gefundenen Werte von p ist $12,36 \text{ Dyn/cm}^2$, wohingegen die Summe des an Mc Leods Manometer abgelesenen Druckes und der Spannung der Quecksilberdämpfe $22,08 \text{ Dyn/cm}^2$ beträgt, was bei weitem nicht als gute Übereinstimmung bezeichnet werden kann.

Es sind mehrere Reihen von Beobachtungen ähnlicher Art wie die beiden angeführten angestellt worden. Jede von ihnen ergibt einen mittleren Wert p des Druckes, aus den bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Abstoßungen berechnet. In der folgenden Tabelle sind diese Werte von p angeführt nebst denen von p' , die den an Mc Leods Manometer abgelesenen Druck angeben, zuzüglich der Spannung der Quecksilberdämpfe.

Atmosphärische Luft.										
$p \text{ Dyn/cm}^2$	2,28	2,79	3,55	4,29	5,62	7,12	9,55	12,36	15,17	
$p' \text{ Dyn/cm}^2$	2,24	2,97	4,04	5,08	7,04	9,75	14,86	22,08	32,67	

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 29. p. 193. 1909.

Wasserstoff.

p Dyn/cm ²	1,92	3,04	5,24	7,24	11,80	14,28	21,14	26,35
p' Dyn/cm ²	1,90	3,51	5,96	9,46	15,22	19,53	33,60	49,14

Die Messungen mit Sauerstoff und Kohlensäure ergaben Beobachtungsreihen, die sich der Reihe der Beobachtungen mit atmosphärischer Luft sehr eng anschlossen. Es geht aus sämtlichen Beobachtungen hervor, daß die abstoßende Kraft, während man den Druck konstant hält und die Temperaturen ändert, die durch die Formel (8) ausgedrückte Temperaturabhängigkeit sehr genau befolgt. Bei so niedrigen Drucken, daß der an Mc Leods Manometer bestimmte Druck kleiner oder nur wenig größer ist als der Druck der gesättigten Quecksilberdämpfe, scheint die Formel (8) auch in bezug auf die Zahlenfaktoren zu passen, aber hierzu ist doch zu bemerken, daß der Druck der gesättigten Quecksilberdämpfe sich bei jedem Grad Temperaturveränderung um 0,17 Dyn/cm² ändert, und daß man nicht mit Sicherheit davon ausgehen kann, daß die Quecksilberdämpfe wirklich den Druck gehabt haben, der der Temperaturbestimmung an einer einzelnen Stelle des recht umfangreichen Apparats entspricht. Bei höheren Drucken gibt die gemessene Abstoßung in allen Fällen zu kleine Werte von p , und die relative Abweichung scheint kleiner zu sein in Wasserstoff als in den übrigen Gasen. In diesen Gasen ist die mittlere Weglänge bei dem Druck von 1 Dyn/cm² ca. 10 cm. Bei 33 Dyn/cm², wo die Abstoßung nur ca. halb so groß ist wie die aus Formel (5) berechnete, ist die mittlere Weglänge ca. $1\frac{1}{2}$ mal so groß wie der Abstand zwischen Platinblatt und Platinplatte und man kann somit auch nicht verlangen, daß Formel (8) hier Anwendung finden soll, da sie ja eben unter der Voraussetzung berechnet wurde, daß die Entfernung der Platten verschwindend klein sein sollte im Vergleich mit der mittleren Weglänge. Aber auch bei niedrigeren Drucken, wo der Abstand der Platten nur $\frac{1}{10}$ oder einen noch kleineren Bruchteil der mittleren Weglänge beträgt, scheint die Abweichung so groß zu sein, daß man die Formel nur mit recht grober Annäherung anwenden darf, und man kann hieraus schließen, daß das absolute Manometer in der hier beschriebenen Gestalt nur bei Messungen sehr kleiner Drucke angewendet werden darf. Ob

es in dieser Gestalt überhaupt anwendbar ist, beruht auch darauf, ob nicht die besonderen Verhältnisse, die sich unzweifelhaft an den Rändern des warmen Platinblattes geltend machen, eine so große Rolle spielen, daß darauf besondere Rücksicht genommen werden muß.

Um diese Frage zu entscheiden, habe ich dem Manometer eine andere und zwar rationellere Gestalt gegeben, die ich jetzt beschreiben werde.

5. Die rationelle absolute Manometerform und Messungsergebnisse.

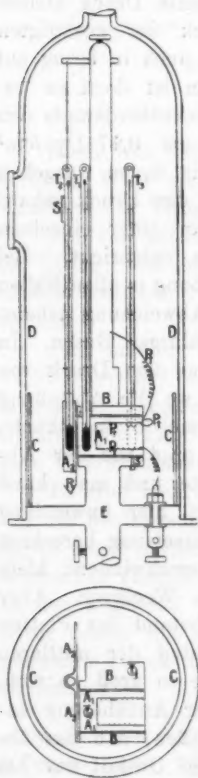


Fig. 3.

Auf dem Teller der Luftpumpenglocke *D* (Fig. 3), der Metallplatte *E*, wurde der Kupferblock *BB* festgemacht. In einer zylindrischen Ausbohrung dieses Blockes wurde der Kupferzylinder *A*, angebracht, der durch sechs Glasspitzen in seiner Stellung gehalten wurde. Bei der Anbringung des Zylinders wurde dafür gesorgt, daß seine eine polierte Endfläche so nahe wie möglich mit der einen Seitenfläche des Kupferblockes, die gleichfalls poliert war, in eine Ebene gebracht wurde. Der zylindrisch-ringförmige Zwischenraum zwischen dem Kupferzylinder und dem Kupferblock hatte eine Dicke von 0,0174 cm. Der Kupferzylinder hatte einen Durchmesser von 1,63 cm. Er war durch einen Platindraht *Pt* zu erwärmen, der, wie die Figur zeigt, in einer Ausbohrung im Kupferzylinder angebracht war, und die Temperatur wurde an einem Quecksilberthermometer (*T₁* in der Figur) abgelesen; das Thermometer war in einem Loch im Kupferzylinder angebracht und durch Stanniol, das um den Thermometerbehälter gewickelt war, mit demselben wärmeleitend verbunden; bei

späteren Versuchen wurde als Verbindung eine leicht schmelzbare Legierung angewendet. Der polierten Endfläche des Kupferzylinders parallel wurde die Kupferplatte A_2 aufgehängt, die an der dem Zylinder zugekehrten Seite ebengeschliffen und poliert war. In dieser Kupferplatte wurde das Thermometer T_2 eingesetzt und der Ablesespiegel S wurde an das Thermometer befestigt. Am Ohr des Thermometers war der Aufhängungsplatindraht ($\frac{1}{10}$ mm) befestigt. Der Aufhängungsdraht wurde außerdem am Thermometer entlang zur Kupferplatte hinabgeleitet, wo er befestigt wurde, um eine elektrisch leitende Verbindung zwischen der Kupferplatte und den übrigen Metallteilen des Apparates zu sichern, da es selbstredend von großer Bedeutung ist, eine Mitwirkung elektrischer Kräfte möglichst zu verhindern. CC ist eine geschwärzte metallene Röhre, die zur Ausgleichung der Temperaturen zwischen dem Kupferblock, dem Pumpenteller und der an der Rückseite geschwärzten Kupferplatte beiträgt. CC schützt auch hinlänglich vor elektrischen Kräften von den Wänden der Luftpumpenglocke DD . In der metallenen Röhre CC wurden einander gerade gegenüber zwei Fensterchen angebracht, durch die man den Rand der Kupferplatte A_2 und mittels eines Mikroskops die Dicke des Zwischenraums zwischen Kupferplatte und Kupferzylinder oder Kupferblock messen konnte. Dies geschah durch Messung des Abstandes eines Randes des Kupferblockes von dem Spiegelbild dieses Randes in der polierten Fläche der Kupferplatte. Der Abstand von der Achse des Kupferzylinders bis zur Umdrehungsachse der Kupferplatte betrug 1,233 cm (Arm der Kraft). Das wirksame Areal der warmen Platte, nämlich die polierte Endfläche des Kupferzylinders, bis zur Mitte des kreisringförmigen Raumes zwischen Kupferzylinder und Kupferblock, war $2,133 \text{ cm}^2$. In ein paar auf der Kupferplatte angebrachte metallene Haken R wurde ein Metallzylinder mit bekanntem Trägheitsmoment gelegt, um das Trägheitsmoment der Kupferplatte selbst und ihres Zubehörs in bekannter Weise zu bestimmen. Dies Trägheitsmoment war 19,05 und die Schwingungsdauer 2,46 Sek. für jede ganze Schwingung. Um die Kupferplatte der Endfläche des Kupferzylinders parallel stellen zu können, und um die Empfindlichkeit variieren zu können, ohne den Apparat

auseinander zu nehmen, war auf der Kupferplatte eine kleine Magnetnadel und außerhalb der Luftpumpenglocke ein Lenkmagnet angebracht. Die Luftpumpenglocke war mit einer Gaedeschen Quecksilberpumpe und einem Mc Leods Manometer verbunden.

Wesentlich bei dieser Konstruktion ist es, der warmen Platte eine wohldefinierte Größe zu geben und eventuelle Unregelmäßigkeiten an den Rändern zu vermeiden, und daß es ermöglicht wird, den Abstand zwischen der warmen Kupferplatte und der beweglichen Kupferplatte sehr klein zu machen. Bei den nun anzuführenden Messungen betrug dieser Abstand 0,012 cm. Es wird ferner eine so kleine Empfindlichkeit und eine so kleine Temperaturdifferenz gewählt, daß die Ausschläge bei der Spiegelablesung nicht viel mehr als 1 cm betragen, was eine Veränderung des mittleren Abstandes zwischen der warmen und der kalten Platte von 0,005 cm zur Folge hat. Mit diesem Apparat wurde die folgende Reihe von Messungen ausgeführt. Die Temperatur der schwingenden Platte stieg während des Versuches von 23,0 auf 24,8°. Indem die Drucke p aus der Formel (9) berechnet worden sind, wird hier die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ aufgeführt. Der Apparat war mit Sauerstoff gefüllt gewesen.

$T_1 - T_2$	17,4	21,8	26,3	31,1	35,9	40,9
p Dyn/cm ²	2,72	2,72	2,82	2,76	2,81	2,75
$T_1 - T_2$	45,9	50,9	55,9	60,9	65,9	70,9
p Dyn/cm ²	2,78	2,74	2,76	2,82	2,74	2,84

Man sieht, daß die gefundenen Werte von p recht konstant bleiben, ihr mittlerer Wert ist 2,77 Dyn/cm². Der an Mc Leods Gauge gemessene Druck war 0,91 Dyn/cm². Der restierende Wert 1,86 Dyn/cm² kann annehmbar von den Quecksilberdämpfen herrühren, deren Druck bei 22° diesem Werte gleich ist. Hätte man p aus der Formel (8) berechnet, so hätte man ein den Temperaturdifferenzen gemäß schwach zunehmendes p gehabt, dessen Zunahme aber doch nicht größer gewesen wäre, als daß sie aus Fehlern der Ausschlagbestimmung zu erklären gewesen wäre; der Ausschlag betrug bei der kleinsten Temperaturdifferenz 0,16 cm und bei der größten 0,75 cm.

Eine entsprechende Reihe von Bestimmungen, die mit Wasserstofffüllung und bei einem Abstand von 0,043 cm von Platte zu Platte ausgeführt wurden, gab folgendes Resultat:

$T_1 - T_2$	10,7	12,6	19,4	24,5	35,8	44,0	71,0
p Dyn/cm ²	33,5	33,8	34,3	34,9	34,7	34,5	35,1

Die Werte von p sind hier aus der Formel (8) berechnet. Der an Mc Leods Gauge gemessene Druck zuzüglich des Druckes der Quecksilberdämpfe betrug 46,6 Dyn/cm². Wie man aus der Reihe von Zahlen sieht, besteht hier eine vorzügliche gegenseitige Übereinstimmung zwischen den bei verschiedenen Temperaturdifferenzen ausgeführten Bestimmungen von p , aber der tatsächliche Druck ist 1,33mal so groß wie der aus der abstoßenden Kraft berechnete.

Um zu untersuchen, wie die abstoßende Kraft vom Drucke abhängig ist, habe ich eine Reihe von Messungen bei verschiedenem Druck ausgeführt. Der Abstand der Platten war ohne Ausschlag 0,012 cm. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen aufgeführt. $T_1 - T_2$ ist die Temperaturdifferenz der Platten, α der durch Spiegelablesung beobachtete Ausschlag in Zentimetern, p der aus der Formel (9) berechnete Druck, p' der an Mc Leods Gauge gemessene Druck zuzüglich des Druckes der Quecksilberdämpfe.

Wasserstoff. (Die Drucke sind in Dyn/cm² angegeben.)

$T_1 - T_2$	α	p	p'	p'/p
46,1	0,40	2,57	2,60	1,01
46,4	0,43	2,87	2,89	1,01
45,4	0,58	3,78	3,95	1,05
44,1	0,68	4,57	4,87	1,06
42,8	0,86	5,95	6,51	1,09
40,5	1,03	7,53	8,35	1,11
37,5	1,24	9,80	11,03	1,13
31,4	1,40	13,2	15,5	1,17
40,7	2,62	19,1	23,1	1,21
13,9	0,88	19,2	23,5	1,22
9,6	0,92	29,0	36,7	1,27
6,6	0,84	38,0	52,0	1,34
4,8	0,88	56	82	1,47
4,3	0,87	55	83	1,50
3,0	0,96	88	138	1,57

Wasserstoff. (Die Drucke sind in Dyn/cm² angegeben.)

$T_1 - T_2$	α	p	p'	p'/p
3,5	1,38	118	191	1,6
3,2	1,50	141	250	1,8
3,0	1,50	148	309	2,1
3,0	1,67	165	381	2,3
3,1	1,93	185	476	2,6
3,1	2,05	196	576	2,9
2,5	1,83	217	945	4,4
2,4	1,80	222	1366	6,2
2,2	1,43	242	2185	9,0
2,1	1,10	155	3353	22,0
2,2	1,00	135	5016	37,0
1,5	0,40	79	11706	148,0

Sauerstoff. (Die Drucke sind in Dyn/cm² angegeben.)

44,9	0,42	2,77	2,77	1,00
40,7	0,46	3,35	3,56	1,06
47,0	0,70	4,41	4,79	1,09
41,3	0,77	5,52	6,47	1,17
40,1	0,87	6,43	7,85	1,22
38,5	1,05	8,08	10,52	1,30
38,2	1,30	10,1	14,0	1,39
33,1	1,56	14,0	21,1	1,51
27,4	1,65	17,8	28,2	1,58
21,4	1,82	25,2	43,9	1,74
16,6	2,22	39,6	84,0	2,11
10,4	1,98	56,4	139	2,47
8,0	1,85	69	603	8,8
4,4	0,36	24	2013	83
4,8	0,07	4,3	4291	993

Man sieht aus diesen Tabellen, daß die Größe p , die der abstoßenden Kraft der Einheit des Temperaturunterschiedes proportional gesetzt ist, gleich p' bei kleinen Drucken ist. Bei wachsendem Druck entfernt p sich mehr und mehr von p' , indem p immer kleiner ist als p' . p erreicht ein Maximum, das bei Wasserstoff ca. 250 Dyn/cm² ausmacht bei einem Druck, der 10mal so groß ist wie dieser Wert. Bei Sauerstoff beträgt der Maximalwert der Kraft 70 Dyn/cm² bei einem Druck, der 10mal so groß ist wie dieser Wert. Die Maximalkraft ist bei Wasserstoff also fast 4mal so groß wie bei

Sauerstoff, was für die Benutzung der Radiometerapparate zur Messung von Strahlungsenergie Bedeutung hat.

Die Größe p'/p zeigt bei beiden Gasen bei steigendem Druck eine kontinuierliche Zunahme vom Werte 1 bei niedrigen Drucken bis auf den Wert ∞ bei so großen Drucken, daß p Null ist.

Eine genauere experimentelle Untersuchung der Größe der abstoßenden Kraft zeigte, daß diese bei so großen Drucken, daß der Plattenabstand der mittleren Weglänge gleich oder größer ist als diese, in keiner einfachen Weise vom Druck und den Temperaturen abhängt, und die Messungen haben somit ergeben, daß der Apparat sich bei höheren Drucken nicht als absolutes Meßinstrument anwenden läßt. Übrig bleibt noch zu entscheiden, ob er bei kleinen Drucken anwendbar ist. Die beiden Tabellen über p und p' scheinen zu zeigen, daß p'/p sowohl bei Wasserstoff als bei Sauerstoff gegen 1 konvergiert, wenn der Druck gegen 0 konvergiert. Mit vollständiger Sicherheit läßt sich dies jedoch nicht durch die Tabellen entscheiden, da man nicht genau wissen kann, welchen Einfluß die Quecksilberdämpfe und andere möglicherweise anwesende Dämpfe gehabt haben können. Um diese Frage zu entscheiden, versuchte ich die Dämpfe aus dem Manometer zu entfernen, indem ich dessen Glasglocke mit einer abwärts gebogenen geschlossenen Glasröhre versah, die in einer Mischung von Kohlensäure und Benzin abgekühlt wurde, während das Manometer von der Pumpe und Mc Leods Manometer durch einen Hahn abgesperrt wurde. Durch die Abkühlung der Seitenröhre wurde der Ausschlag der beweglichen Platte allerdings etwas geringer, aber nicht um so viel, wie aus dem Druck der Quecksilberdämpfe bei der herrschenden Temperatur allein berechnet. Da ich annahm, daß dies seinen Grund darin habe, daß bedeutendere Mengen von Quecksilber im Laufe der Zeit an den verschiedenen metallenen Teilen des Apparates verdichtet worden waren und sich mit ihnen amalgamiert hatten, betrachtete ich die Anstellung dieser Prüfung mit einem neuen Apparat als notwendig.

Um den Druck der permanenten Gase im Apparate um sehr kleine aber wohl bekannte Größen schnell steigern zu können, versah ich den Apparat mit einem Glaspipettensystem,

vgl. Fig. 4. Der Glasbehälter *C*, der ca. 1 Liter enthielt, war an jedem Ende mit zwei Hähnen versehen. Der Raumgehalt von *C* wurde durch Wägung mit Wasser bestimmt, während der von *B* und von *D* zwischen den Hahnproppen durch Auswägung mit Quecksilber bestimmt wurde. Jeder dieser Raumgehalte war ca. 2 ccm. Das eine Ende *E* wurde mit dem

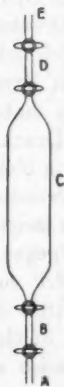


Fig. 4.

absoluten Manometer mit dem dazu gehörigen Mc Leods Manometer verbunden, dessen gesamter Raumgehalt durch das Mariottesche Gesetz auf ca. 4 Liter bemessen wurde. Das andere Ende des Pipettensystems *A* wurde mit dem Gasentwicklungsapparat und einem Quecksilbermanometer verbunden. Das ganze Pipettensystem nebst dem absoluten Manometer wurde stark ausgepumpt. Der Raum *B* wurde darauf mit dem Gasentwicklungsapparat und dem Quecksilbermanometer in Verbindung gesetzt. Der Druck in *B* wurde gemessen; es wurde gewöhnlich ein Druck von ca. $\frac{1}{2}$ Atm. benutzt. Die Gasmenge von *B* wurde sodann über das ganze Pipettensystem verteilt, und dieses wurde durch ein wenig Phosphorsäureanhydrid im Behälter *C* trocken gehalten. Von dieser Gasmenge können kleine Partien durch die Pipette *D* bequem in den Manometerraum eingeführt werden. Bei den benutzten Pipettenraumgehalten wird der Druck bei jeder Füllung im absoluten Manometerraum durch ca. 1 Millionstel des am Quecksilbermanometer abgelesenen Druckes gesteigert. Bei jeder Pipettenfüllung wurde der Druck *p* am absoluten Manometer gemessen.

Der Abstand zwischen dem Kupferblock und der beweglichen Platte war bei diesen Messungen 0,056 cm, und die Empfindlichkeit war eine solche, daß 1 Dyn/cm² bei dem benutzten Temperaturunterschied von 30—40° einem Ausschlag von ca. 1 cm bei der Spiegelablesung entsprach.

In den folgenden Tabellen sind die Druckangaben des absoluten Manometer *p* in Dyn/cm² und ihre Differenzen Δp angeführt. Unter $\Delta p'$ sind die bei jeder Pipettenfüllung durch das Mariottesche Gesetz berechneten Drucksteigerungen angeführt. Die Bestimmung von $\Delta p'$ ist durch Ablesungen an

Mc Leods Manometer kontrolliert worden. Die Unübereinstimmung betrug höchstens 2 Proz. des gemessenen Partialdruckes.

Wasserstoff.			Sauerstoff.			Kohlensäure.		
p	Δp	$\Delta p'$	p	Δp	$\Delta p'$	p	Δp	$\Delta p'$
2,46	0,50	0,48	2,45	0,50	0,47	2,33		
2,96	0,49	0,47	2,95	0,46	"	2,75	0,42	0,47
3,45	0,47	"	3,41	0,45	"	3,18	0,43	"
3,92	0,47	"	3,86	0,40	"	3,63	0,45	"
4,39	0,49	"	4,26	0,44	"	McLeod-Messung.		
4,88	0,45	"	4,70	0,42	"	3,83		
5,33	0,48	"	5,12	0,38	"	4,23	0,40	0,47
5,81	0,45	"	5,50	0,39	"	4,61	0,38	"
6,26			5,89			5,00	0,39	"
McLeod-Messung.			McLeod-Messung.			5,42	0,42	"
6,24	0,40	0,47	6,02	0,35	0,46	5,78	0,36	"
6,64	0,40	0,46	6,37	0,37	"	McLeod-Messung.		
7,04	0,45	"	6,74	0,36	"	5,93	0,34	0,46
7,49	0,45	"	7,10	0,38	"	6,27	0,31	"
7,94	0,43	"	7,48	0,35	"	6,58	0,33	"
8,37	0,39	"	7,83	0,41	"	6,91	0,33	"
8,76	0,39	"	8,24	0,32	"	7,24	0,34	"
9,15	0,38	"	8,56	0,33	"	7,58	0,29	"
9,53	0,42	"	8,89	0,37	"	7,87	0,36	"
9,95	0,36	"	9,26	0,32	0,45	8,23	0,29	"
10,31	0,40	0,45	9,58	0,34	"	8,52	0,41	"
10,71	0,40	"	9,92	0,29	"	8,93	0,20	0,45
11,11			10,21			9,13		

Aus diesen Tabellen sieht man, daß die vom absoluten Manometer angegebenen Drucksteigerungen Δp bei kleinem Druck nahezu den durch das Mariottesche Gesetz bestimmten Drucksteigerungen $\Delta p'$ gleich sind. Die Abweichungen haben dieselbe Größe wie die Beobachtungsfehler, so daß die angeführten Beobachtungen die Schlußfolgerung berechtigen, daß das absolute Manometer imstande ist, den Druck der unter-

suchten und somit wahrscheinlich aller permanenten Gase richtig anzugeben. Im folgenden soll gezeigt werden, daß es sich auch zur Bestimmung des Druckes gesättigter Quecksilberdämpfe und somit wahrscheinlich aller gesättigter und ungesättigter Dampfdrucke anwenden läßt, vorausgesetzt natürlich, daß die beiden Platten, deren Abstoßung gemessen wird, keiner Kondensation oder chemischen Beeinflussung ausgesetzt sind.

Schon bei einem Druck von 3—5 Dyn/cm² hat man bei Sauerstoff und namentlich bei Kohlensäure eine bemerkbare Abweichung, in Übereinstimmung damit, daß die mittlere Weglänge der Moleküle bei gegebenem Druck kleiner ist bei diesen Gasen als bei Wasserstoff, wo die Abweichung erst bei etwas höheren Drucken bemerkbar wird und bei gleichem Druck stets geringer ist als bei Sauerstoff und Kohlensäure.

6. Die Verwendbarkeit des absoluten Manometers zur Bestimmung des Druckes von Quecksilberdämpfen.

Es wurde durch Biegung von dünnem Platinblech um eine viereckige metallene Stange ein ca. 3 cm hohes Platinkästchen *a* hergestellt (Fig. 5). Das oben und unten offene Kästchen war ca. 2 cm breit und 0,6 cm weit. Im Kästchen wurden



Fig. 5.

fünf Streifen *b* von dünner Platinfolie, vom Kästchen isoliert, angebracht. Die Streifen konnten elektrisch erwärmt werden, indem sie in Serie gestellt wurden, so daß sie einen Widerstand (ca. 3 Ohm) erhielten, der eine zum Messen passende Größe hatte. An einem der Platindrähte, die vom Kästchen nach oben führten und zur Leitung des Heizstromes durch die Streifen dienten, war eine kleine Querstange angebracht, an der eine Platinplatte *c* in zwei dünnen Platindrähten aufgehängt war. Der Rand der Platinplatte *c* konnte durch ein Ablesemikroskop mit Okulareinteilung beobachtet und der Ausschlag der Platte also gemessen werden, indem an den Seiten des Platinkästchens *a* zwei kleine Ausschnitte gemacht waren. Das Platinkästchen dient zur Beschützung der Platte gegen elektrische Beeinflussungen von außen. Das Flächenmaß der Platinstreifen betrug $2,10 \times 1,10$ cm², das Gewicht der

Platte 0,1205 g und der Abstand von ihrer Mitte bis zu den Befestigungspunkten der Aufhängedrähte am Querbalken 6,3 cm. Bei Erwärmung der Platinstreifen wird die Platte abgestoßen, und aus deren Ausschlag, den man mißt, kann man sodann leicht die Kraft K berechnen, die zwischen jedem Quadratcentimeter der Platte und den warmen Platinstreifen wirkt. Die Temperatur der Platinstreifen wurde durch ihren Widerstand bestimmt, und die Erwärmung sowie die Messungen dauerten so kurz, daß die Platte in keinem merkbaren Grade erwärmt wurde (unter $\frac{1}{3}$ Minute). Dieser kleine Platinapparat wurde in einer 2,3 cm weiten Glasröhre angebracht, durch welche die Leitungsplatin-drähte geführt wurden. Diese Röhre war oben mit Mc Leods Manometer verbunden, konnte aber durch einen Hahn davon abgesperrt werden. Das untere Ende der Röhre konnte in einer Kältemischung oder in kaltem Wasser abgekühlt werden. Dieser kleine Apparat war sehr bequem, und die Messungen damit waren sehr zuverlässig. Ein wesentlicher Vorteil ist es, daß bei der Zusammensetzung des Apparates weder Kitt noch Lack angewendet worden ist: er besteht ganz aus Platin und Glas. Die Platinstreifen wurden erst eine Zeitlang bis zur Rotglut im Vakuum erwärmt, damit okkludierte Gase vertrieben würden. Darauf wurde eine Reihe von Messungen ausgeführt, bei denen der Temperaturunterschied zwischen den Platinstreifen und der Platinplatte 560° betrug. Die Messungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle aufgeführt: unter t die Temperatur des den unteren Teil des Apparats umgebenden Bades, unter p der aus der Formel (8) und dem beobachteten Ausschlag berechnete Druck in Dyn/cm², abzüglich des Druckes, den das Manometer zeigte, wenn das untere Ende der Röhre in einer Mischung von Kohlensäure und Benzin angebracht war. Da also das untere Ende der Röhre stark abgekühlt wurde, muß eine Korrektur stattfinden, damit das im Apparate befindliche permanente Gas sich bei dieser Abkühlung zusammenziehe. Diese Größe wurde auf empirischem Wege durch zwei Versuche gefunden, bei denen ungleich große Volumina der Röhre bis auf die niedrige Temperatur abgekühlt wurden; es ergab sich, daß der bei der starken Abkühlung gemessene Druck korrigiert werden muß, so daß der bei der Abkühlung gemessene Druck 0,64 sich in 0,68 ändert.

Außerdem muß wegen der thermischen Molekulardrucke in der Röhre eine kleine Korrektur eingeführt werden. Nach diesen Korrekturen ergaben sich folgende Werte p des Druckes der Quecksilberdämpfe. Vergleichshalber werden unter p' die aus der früher¹⁾ aufgestellten Tabelle über den Druck der Quecksilberdämpfe berechneten Werte aufgeführt

t	abs. Man. p Dyn/cm ²	Molekularströmung p' Dyn/cm ²
-10,0°	0,11	0,09
0,0	0,29	0,25
6,9	0,55	0,48
11,1	0,82	0,71
15,7	1,14	1,08
20,6	1,67	1,67
24,4	2,26	2,29

Die Übereinstimmung zwischen den beiden auf so verschiedenen Wegen gefundenen Reihen ist durchaus befriedigend, wenn darauf Rücksicht genommen wird, daß die Korrektur der Abkühlung wegen recht unsicher ist, was die Bestimmung des kalten Volumens betrifft.

Diese Versuche beweisen, daß man imstande ist, die Quecksilberdämpfe durch Kältemischungen nach einigen Minuten aus dem Meßapparat zu entfernen, und daß das absolute Manometer bei der Bestimmung des Druckes von Quecksilberdämpfen angewendet werden kann, indem die theoretischen Formeln mit den Meßergebnissen übereinstimmen.

Diese Versuchsreihe kann auch zur Entscheidung der Frage beitragen, ob Formel (8) oder Formel (9) die genauesten Bestimmungen ergibt, da die Anwendung von Formel (9) zu einer weniger guten Übereinstimmung geführt haben würde. Daß somit Formel (8) vorzuziehen ist, geht auch aus der folgenden Tabelle hervor, in der die Zeile $T_1 - T_2$ den Temperaturunterschied zwischen den Platinstreifen und der Platinplatte, die Zeile p den aus dem Ausschlag durch Formel (8) berechneten Druck und die Zeile p' den aus dem Ausschlag durch Formel (9) berechneten Druck enthält.

$T_1 - T_2$	96°	245°	331°	416°	520°	589°
p Dyn/cm ²	1,57	1,54	1,54	1,53	1,49	1,59
p' Dyn/cm ²	1,44	1,31	1,26	1,19	1,13	1,18

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 31. p. 223. 1910.

Man sieht, daß p' , während p recht konstant bleibt, deutlich abnimmt, woraus man schließen kann, daß (9) nur eine Annäherungsformel ist, die theoretische Formel (8) aber besser mit den Versuchen übereinstimmt.

Wie bereits angedeutet, gibt der Platinapparat während der Erwärmung etwas okkludiertes Gas ab. Nachdem der Apparat einige Zeit gebraucht worden ist, wird die Gasentwicklung gering und zuletzt verschwindend klein, wenn man dafür sorgt, daß die Erwärmung nicht stärker ist, als sie es früher war, und die Messungen mit dem Apparate lassen sich mit Zuverlässigkeit ausführen. Ein Vorteil würde es unzweifelhaft sein, sich dieser Wirkungen zu entledigen, weshalb ich es versucht habe, dem Apparate andere Formen zu geben.

7. Andere Manometerformen.

AA (Fig. 6) ist eine 1,4 cm weite Glasröhre, in die eine etwas engere Glasröhre *BB* eingeblasen ist. Diese Röhre hat bei *C* einen 0,41 cm breiten und 2,95 cm hohen rechtwinkligen Ausschnitt. Vor diesem Ausschnitt hängt mitten in der Röhre an zwei bei *E* festsitzenden Kokonfäden ein Glimmerblatt *D*. Die Röhre *AA* kann durch ein Wasserbad *FF* von außen erwärmt werden, und man sorgt dafür, daß man die Temperatur des Wasserbades durch Hinzuführung von warmem oder kaltem Wasser schnell nach Belieben verändern kann.

Enthält das Bad zu Anfang kaltes Wasser, so notiert man dessen Temperatur und die Stellung des Glimmerblattes, die mittels eines Mikroskops mit Okularmikrometer abgelesen wird. Wird nun dem Bade warmes Wasser zugeführt, so wird die Glasröhre *AA* erwärmt, während die Wärme der inneren Glasröhre und dem Glimmerblatt langsam zuzießt. Die von der warmen Glaswand durch den Ausschnitt der inneren Röhre an das Glimmerblatt herantretenden Gasmoleküle stoßen das

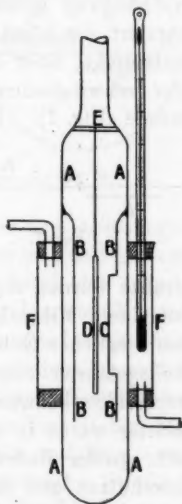


Fig. 6.

Glimmerblatt zurück, und man notiert die Temperatur des Bades und die Stellung des Glimmerblattes. Durch die beiden abgelesenen Temperaturen, das Gewicht des Glimmerblattes, die Länge der Aufhängung, den Flächengehalt des Ausschnittes und die Größe des Ausschlages kann man in ähnlicher Weise wie bei dem oben beschriebenen Apparat den Druck ausfindig machen. Mit einem solchen Apparat fand ich für Maximalspannung der Quecksilberdämpfe bei $13,5^{\circ}$ $0,88 \text{ Dyn/cm}^2$, wo man nach der oben erwähnten Tabelle $0,87 \text{ Dyn/cm}^2$ erwarten sollte.

Will man eine große Empfindlichkeit erzielen, so daß man mit Genauigkeit Drucke messen kann, die nur einen kleinen Bruchteil von 1 Dyn/cm^2 ausmachen, so eignen sich Apparate mit pendelartig aufgehängter Platte weniger gut dazu, da man behufs einer großen Empfindlichkeit eine so dünne Platte wählen muß, daß sie ihre Temperatur schnell ändern kann. Die größte Empfindlichkeit läßt sich natürlich durch Torsionsaufhängung erzielen. Ich habe daher einen Apparat konstruiert, der in seinem Prinzip dem von mir zuerst beschriebenen entspricht, aber darin von ihm abweicht, daß an jeder Seite der schwingenden Platte *B* ein Platinstreifen *A* angebracht wurde (Fig. 7). Die Platte *B* war eine platierte Glimmer-

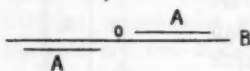


Fig. 7.

platte, an einem dünnen Platindraht *o* aufgehängt. Die Platinstreifen *A* konnten elektrisch erwärmt und ihre Temperatur durch den Widerstand bestimmt werden. Die Leitungs-

drähte wurden durch die Glaswand geführt und die Ausschläge an einem Mikroskop mit Okularmikrometer gemessen, so daß man jeglichen Gebrauch von Kitt und damit folgende Undichtigkeitsgefahren oder nicht hierher gehörige Dampfspannungen vermeiden konnten. Das schwingende System und die Platinblätter waren in einem Nickelkästchen angebracht, da es von sehr großer Bedeutung ist, sie vor elektrischen Wirkungen zu beschützen und für leitende Verbindung zwischen der schwingenden Platte und den Umgebungen zu sorgen. Auch dieser Apparat hatte eine gute Übereinstimmung mit der Theorie aufzuweisen, auch wenn darauf keine Rücksicht genommen wird, daß die Entfernung zwischen den warmen Platinstreifen

und der schwingenden Platte nicht klein ist im Vergleich mit der Breite der Streifen. Durch die Messungen mit diesem Apparat und dem früher beschriebenen kleinen Platinapparat kann es als entschieden betrachtet werden, daß der Druck gesättigter Quecksilberdämpfe sich bequem zur Justierung des Apparates benutzen läßt, wenn man die recht umständliche absolute Bestimmung durch Schwingungszeit und Trägheitsmoment vermeiden will.

Von den verschiedenen von mir geprüften Manometerkonstruktionen hat folgende sich als am leichtesten herstellbar und in vielen Beziehungen zweckmäßig bewährt. Wie bei dem Fig. 6 abgebildeten Apparat kann die Temperatur der äußeren Glasröhre schnell in bekannter Weise durch einen umgebenden Wassermantel geändert werden. Die äußere senkrecht gestellte Glasröhre *A* (Fig. 8) hatte einen Durchmesser von ca. 2,5 cm. *CC* sind zwei ca. 1 cm breite und 0,3 cm dicke Glasstreifen, die durch eiserne Stücke oben und unten miteinander verbunden und mittels Federn im Innern der Röhre angebracht sind. Das obere Verbindungsstück dient zur Befestigung des Aufhängefadens *o*, der aus einem kleinen Bündel Kokonfäden bestand. Die schwingende Platte *B* war aus Glimmer, 2 cm breit und 4 cm hoch.

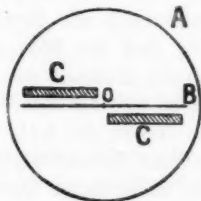


Fig. 8.

In fester Verbindung mit der Platte stand außer dem Ablesungsspiegel ein kleiner wagerechter Eisendraht, 1 cm lang und 0,15 cm dick. Dadurch wurde bezweckt, daß man durch den in angemessener Weise außerhalb des Apparates angebrachten Magnet dem Glimmerblatt eine wohldefinierte Gleichgewichtsstellung geben und die Empfindlichkeit innerhalb außerordentlich weiter Grenzen variieren konnte. Die Benutzung eines Eisendrahtes statt eines kleinen Magnets bietet außerdem den Vorteil dar, daß man bei großer Empfindlichkeit nicht durch zufällige, von außen kommende magnetische Einflüsse (elektrische Straßenbahnen) geniert wird. Daß die Magnetpole des Eisendrahtes ihre Lage verändern, habe ich nicht bemerkt. Ist dies zu befürchten, kann ein astatisches Magnetsystem verwendet werden.

Wird der das Glimmerblatt umgebende Teil der Röhre *A* erwärmt, so wird das Glimmerblatt an den Stellen stark gestoßen, wo es nicht durch die Stangen *C* geschützt wird, und es dreht sich folglich gegen diese Stangen hin. Waren die äußeren Magnete so angebracht, daß man eine Schwingungsdauer von 1,848 Sek. (volle Schwingungen) erhielt, so war die Empfindlichkeit eine solche, daß man bei einer Temperaturveränderung von 37° und einer Skalenentfernung von 1,25 m einen Druck von $0,485 \text{ Dyn/cm}^2$ hatte, der durch einen Ausschlag von 226 mm bestimmt war. Jedem Millimeter Ausschlag entspricht somit ein Druck von ca. $0,002 \text{ Dyn/cm}^2$. Der Druck ist zunächst bestimmt durch den Ausschlag, der von einer gegebenen Temperaturveränderung der Röhre *A* bestimmt wird, aber hängt doch in gewissem Grade von der Temperatur der Stangen und der Glimmerplatte ab, so daß ein Thermometer im Innern des Apparates angebracht oder dafür gesorgt werden muß, daß die Erwärmung der Röhre *A* nicht so langwierig ist, daß die Stangen und die Glimmerplatte in merkbarem Grade erwärmt werden. Es folgt von selbst, daß die Stangen nicht mit der Röhre *A* in Verbindung stehen dürfen an Stellen, an denen die Röhre erwärmt wird, und ich habe es als vorteilhaft betrachtet, nur solche Stoffe im Apparate anzuwenden, die nicht durch Quecksilber angegriffen werden. Als ein Nachteil bei dieser Konstruktion muß bezeichnet werden, daß das Meßbereich bei sehr niedrigen Drucken anfängt. Durch Benutzung einer flachgedrückten Röhre konnte diesem Übelstand vielleicht abgeholfen werden.

Bei sehr kleinen Drucken liegt vielleicht Veranlassung für Lichtstrahlendruckkorrektur vor. Diese Korrektur läßt sich sehr leicht finden, wenn die Erwärmung auf elektrischem Wege geschieht, da man dann die ausgestrahlte Energiemenge leicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen kann.

Köbenhavns Universitet, März 1910.

(Eingegangen 5. April 1910.)

**6. Über das Verhalten
gebundener Elektronen gegen elektromagnetische
Strahlung in festen Körpern;**

von J. Koenigsberger und K. Kilchling.

Zweiter Teil.

(Erster Teil: Bd. 28. p. 889. 1909.)

§ 9.) Beziehungen zwischen dem Maximum der Absorption der gedämpften und ungedämpften Eigenschwingung.

Es ist

$$(4) \quad \lambda_m' = \frac{\lambda_m}{\sqrt{1 - g_0}}. \quad (\text{p. 895})$$

λ_m' hat keine physikalische, sondern nur rechnerische Bedeutung.

λ_m ist die Eigenwellenlänge bei ungedämpfter Schwingung. Dieses λ_m ist kleiner als die Wellenlänge λ_g der gedämpften Eigenschwingung. Ob λ_g mit der Wellenlänge der Maximalabsorption zusammenfallen sollte, kann nicht ohne weiteres entschieden werden.

Wenn τ_m die Schwingungsdauer der ungedämpften, τ_g die der gedämpften Schwingung bezeichnet, so ist allgemein

$$(5') \quad \tau_g = \tau_m \cdot \sqrt{1 + \frac{A^2}{\pi^2}}.$$

Dabei ist $A = \frac{1}{2} p/\kappa \cdot \tau_g$, und p/κ ist der Faktor von dx/dt in der Ausgangsgleichung für die gedämpfte Schwingung. Die Lorentzsche Theorie setzt diesen Faktor des ersten Differential-

1) Die Beobachtungen, die den vorliegenden theoretischen Betrachtungen zugrunde liegen, wurden mit Hilfsmitteln angestellt, die der *Elizabeth Thompson Science fund* in *Boston* uns überwiesen hat. Wir wünschen dem *Board of Trustees* dieses Fund unsern ergebensten Dank abzustatten.

quotienten gleich $2/\tau_1$. Es ist also zu setzen $2/\tau_1 = p/x$. Aus Gleichung (5) ist dann

$$\tau_g^2 = \frac{\tau_m^2}{1 - \frac{\tau_m^2}{\pi^2 c^2 \tau_1^2}}, \quad \lambda_g^2 = \frac{\lambda_m^2}{1 - \frac{\lambda_m^2}{\pi^2 c^2 \tau_1^2}} = \lambda_m^2 + \frac{\lambda_m^4}{\pi^2 c^2 \tau_1^2},$$

da $\lambda_m^2/\pi^2 c^2 \tau_1^2$ eine kleine Größe. Nun ist nach Lorentz aber auch $g_0' = \lambda_m^2/\pi c \tau_1$. Also ist

$$(6) \quad \underline{\lambda_g^2 = \lambda_m^2 + g_0'^2}.$$

Bei Jodeosin ist $\lambda_m' = 520 \mu\mu$, $g_0 = 0,084$.¹⁾ Dann ist λ_m aus Gleichung (4) $= 497 \mu\mu$; ferner ist $g_0' = 6,47 \cdot 10^{-6}$. Aus Gleichung (6) gibt dies $\lambda_g = 501 \mu\mu$. Die Periode der gedämpften Eigenschwingung liegt also um $4 \mu\mu$ nach größeren Wellenlängen als die der ungedämpften, *fällt aber nicht mit der Wellenlänge der Maximalabsorption λ_κ zusammen, denn $\lambda_\kappa = 508 \mu\mu$.*

Ähnlich verhält es sich bei Fuchsin. Dort ist $\lambda_m' = 530 \mu\mu$, $g_0 = 0,116$, $\lambda_m = 498 \mu\mu$, $g_0' = 4,86 \cdot 10^{-6}$, $\lambda_g = 501 \mu\mu$, während $\lambda_\kappa = 518 \mu\mu$ ist.

Die Reihenfolge der angeführten Wellenlängen ist also $\lambda_m, \lambda_g, \lambda_\kappa, \lambda_m'$.

Eine Erklärung für die merkwürdige Tatsache, daß die Wellenlänge der gedämpften Eigenschwingung nicht mit der Wellenlänge λ_κ der Maximalabsorption zusammenfällt, kann nicht leicht gegeben werden. Es ist auch in keiner der bisherigen Dispersionstheorien gelungen, eine Formel für die Wellenlänge der maximalen Absorption abzuleiten.

Wir haben versucht, λ_κ durch eine Maximumberechnung mittels Differentiation auszuwerten. Wenn $\lambda_\kappa^2 = \lambda_g^2 = \lambda_m^2 + g_0'^2$ wäre, so müßte die Bedingung für das Eintreten von κ Maximum auch durch λ_g erfüllt sein. Es wurde deshalb λ_g eingesetzt. Die sich ergebenden Beziehungen sind außerordentlich kompliziert, und es zeigte sich, daß λ_g die Maximumbedingung keinesfalls erfüllt.

Das logarithmische Dekrement der Elektronenschwingungen (der Eigenfarbe) fester Körper ist für alle etwa von der Größen-

1) Die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten besten Werte von g_0 und g_0' für Jodeosin (vgl. Anhang) sind etwas von obigen verschieden; doch ist das für alle diese Betrachtungen gleichgültig.

ordnung 0,3; also ist die folgende Amplitude jeweils etwa 0,7 der vorhergehenden Amplitude; demnach hat etwa die sechste ganze Schwingung $\frac{1}{100}$ Amplitude der ersten, was in Anbetracht der Schwingungsdauer ausreichend erklärt, warum Phosphoreszenz von nachweisbarer Intensität, die in der Richtung des Lichtstrahles vorhanden sein könnte, bei der gewöhnlichen Absorption nicht auftreten kann. Fluoreszenz kann nach dem Huygensschen Prinzip nicht da sein.

§ 10. Über den Wert von e/m aus Dispersions- und Absorptionsbestimmungen und dessen Änderung mit der Temperatur.

Schon aus der ersten Berechnung von H. A. Lorentz und dann zahlreichen exakteren von P. Drude¹⁾ gegebenen Zahlen für $p(e/m)$ aus Dispersionsbestimmungen zeigte sich deutlich, daß ein ganzzahliger Wert von p , d. i. der Zahl im Ultraviolett schwingender Elektronen pro Atom, nur zu erhalten ist, wenn $e/m = 1,5 \cdot 10^7$ gesetzt wird.

H. Erfle²⁾ hat dies Ergebnis an vielen Substanzen durchaus bestätigt gefunden. Wir haben aus Absorptionsmessungen³⁾ nach einer neuen Methode für die Eigenschwingungen im sichtbaren Spektrum etwa 1,2 bis $1,3 \cdot 10^7$ gefunden.

Mit diesen Berechnungen steht der aus Kathodenstrahlen und Zeemaneffekt übereinstimmend zu rund $1,78 \cdot 10^7$ ⁴⁾ gefundene Wert in Widerspruch. Doch scheint diese Diskrepanz uns durch folgende einfache Erklärung auflösbar zu sein.

Wie aus der Dissoziationstheorie der elektrischen Leitung durch Elektronen folgt, ist die kinetische Temperaturenergie der zuerst schwingenden und bei Temperatursteigerung abdissozierenden Elektronen nicht wesentlich von derjenigen der freien verschieden. Sonst würde die Differenz der spezifischen Wärmen beider ein Glied in die Dissoziationsformel einführen, das mit den Beobachtungen in Widerspruch steht. Wir müssen ferner annehmen, daß diese kinetische Energie der Elektronen im festen und flüssigen Körper sich um so mehr derjenigen der

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 677. 1904.

2) H. Erfle, Ann. d. Phys. 24. p. 672. 1907.

3) J. Koenigsberger und K. Kilchling, Ann. d. Phys. 28. p. 889. 1909.

4) Der genaue Wert dürfte $1,77 \cdot 10^7$ sein.

freien Elektronen nähert, je größer die Schwingungsdauer ist.¹⁾ Elektronen von mehr als 1μ Wellenlänge der Eigenschwingungsdauer gibt es, soviel wir wissen, nicht. Solche mit größerer Wellenlänge werden vermutlich schon bei ganz niedriger Temperatur abdissoziieren oder anderweitig gebunden werden. [Andererseits scheinen Elektronen von $0,3 \mu$ Wellenl nge²⁾ eine weit geringere kinetische Energie zu besitzen und auch erst bei viel höheren Temperaturen abzudissoziieren.] Allerdings kann die kinetische Energie der gebundenen Elektronen mit Absorption im sichtbaren Gebiet bei gewöhnlicher Temperatur nicht in einfachen Schwingungen bestehen; sie wird vielmehr wohl innermolekular übertragen und unterliegt starker Dämpfung. Machen wir aber die Annahme, daß die gebundenen Elektronen eine mehr oder minder große kinetische Energie besitzen, so werden sie wohl nur teilweise den elektrischen Schwingungen des Lichtes folgen können und zwar mit zunehmender kinetischer Energie in geringerem Maße, ähnlich wie z. B. Langevin die Abnahme des Paramagnetismus mit steigender Temperatur erklärt. Analog wie bei Berechnung des Druckes der Gase nach einer Richtung wird zunächst stets nur ein Drittel der Elektronen der betreffenden Schwingungsrichtung des Lichtes folgen können. Die zwei anderen Drittel werden je nach der Größe der bereits vorhandenen Energie mehr oder minder stark dieselbe Bewegungsrichtung annehmen.³⁾ Bei allen bisherigen Dispersionstheorien wurde aber vorausgesetzt, daß die schwingenden Teile eines iso-

1) Dieselbe Annahme hat auch schon A. Einstein (Ann. d. Phys. 22. p. 180. 1907) auf Grund der Strahlungstheorie von Planck gemacht. Auch die von M. Reinganum (Phys. Ztschr. 10. p. 351. 1909) gegebene Ableitung der Formel für die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von der Temperatur führt hierauf. Die von uns gemachten Annahmen stehen scheinbar in Widerspruch mit Sätzen der statistischen Mechanik; doch sind diese wohl wegen der innermolekularen Dämpfung (vgl. § 15) nicht mehr anwendbar, wenn es sich um derartig kleine Schwingungsdauern handelt.

2) So sind z. B. die Elektronen im Quecksilberdampf so starr gebunden, daß sie für die spezifische Wärme bei Temperaturen unter 1000° nicht in Betracht kommen. Treten Atome zu einem Moleküle zusammen, so läßt dagegen die elektrostatische Anziehung auf die einzelnen Elektronen etwas nach.

3) Auch andere Annahmen, z. B. partielles Freiwerden der Elektronen, sind möglich, aber nicht leicht auch mit dem Verhalten der Dielektrizitätskonstanten in Einklang zu bringen.

tropen Körpers von ihrer Ruhelage aus nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig der Kraft der Lichtwellen folgen können. Dies scheint aber insoweit nicht der Fall zu sein, als bereits vorhandene kinetische Energie eine scheinbare Trägheit oder Starrheit des Elektrons bedingt. Wir haben versucht, durch folgende Formel die Variabilität von p in $p(e/m)$ auszudrücken:

$$p_{\tau} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-T \cdot c_{\lambda}}$$

Das würde besagen, daß für sehr niedrige Temperatur $p_{\tau} = 1$, also $p(e/m) = 1,78$ wird, für sehr hohe $p(e/m) = 0,6$ wird. Die Konstante c_{λ} würde für $\lambda = 0,1 \mu$ sehr klein, für $\lambda = 1 \mu$ ziemlich groß sein.

Wir haben diese Formel an unseren Beobachtungen an Jodeosin und Fuchsin zu prüfen gesucht. Es ist aber hervorzuheben, daß wegen des viel zu kleinen Temperaturintervalles von nur 100° und der verhältnismäßig geringen Änderung der Absorption diese Berechnungen nur qualitativ verwertet werden können. Immerhin sind die Schlußfolgerungen nicht von den absoluten, sondern nur von den relativen Werten von g_0 und g_0' abhängig; ein absoluter Fehler von 10 Proz. würde auch nur einen ähnlich großen in den Änderungen ergeben können, nicht aber Sinn und Größenordnung der Änderung fälschen. Es ist $p(e/m)$

für Jodeosin bei $30^{\circ} = 1,26 \cdot 10^7$; bei $100^{\circ} = 1,20 \cdot 10^7$;

„ Fuchsin „ $25^{\circ} = 1,30 \cdot 10^7$; „ $105^{\circ} = 1,23 \cdot 10^7$;

also eine Abnahme, wie die Formel es fordert. Die Konstante c_{λ} ergibt sich für Fuchsin $= 0,00172$, für Jodeosin $= 0,00186$ aus den Beobachtungen bei Zimmertemperatur. Daraus würde sich statt der beobachteten Abnahme für Jodeosin auf $1,20 \cdot 10^7$ eine solche auf $1,18 \cdot 10^7$ und für Fuchsin statt auf $1,23 \cdot 10^7$ auf $1,25 \cdot 10^7$ berechnen, bei der Unsicherheit der Zahlen eine qualitativ genügende Übereinstimmung. Auch die Untersuchungen von R. A. Houstoun¹⁾ haben schon ergeben, daß die Elektronenzahl, oder wie wir das hier gedeutet haben, $p(e/m)$ mit steigender Temperatur abnimmt.

Ein weiterer Beweis dafür, daß unsere Annahme einen richtigen Kern enthalten muß, liegt in dem Verhalten der Dielektrizitätskonstanten. Nach der Helmholtz-Lorentz-

1) R. A. Houstoun, Ann. d. Phys. 21. p. 565. 1906.

Planckschen Theorie müßte für die Dielektrizitätskonstante, soweit sie durch die Elektronen bedingt ist und wenn die quasielastische Kraft konstant bliebe, die gleiche Formel zutreffen. Da aber außer den Elektronen ebenso sehr, wie aus der Formel hervorgeht, die Verschiebung der Ionen für die Dielektrizitätskonstante maßgebend ist, kann die Formel nur qualitativ zutreffen. Daß dies der Fall ist, zeigen die Beobachtungen von Abegg, Cassie, Cohn, Heerwagen, Katz u. a.¹⁾ an Substanzen, bei denen die quasielastische Kraft sich nicht wesentlich ändert, wie bei den meisten organischen Flüssigkeiten. Im allgemeinen nimmt allerdings stets, wie § 7 gezeigt, die quasielastische Kraft mit steigender Temperatur ab. Jedoch ist die dadurch bewirkte Zunahme der Dielektrizitätskonstante bei den meisten Substanzen weit geringer als die Abnahme derselben infolge der oben auseinandergesetzten Ursache. Daher konnte auch Abegg seine Messungen zwischen $+15^{\circ}$ und -85° durch eine Exponentialformel ungefähr darstellen. Gilt unsere Anschauung auch für die Ionenschwingung, so könnte der kleinste Wert der Dielektrizitätskonstante einer Substanz in einer Phase nicht weniger als $\frac{1}{3}$ des Maximalen bei 0° abs. betragen. Die Formel von Abegg müßte dann also etwas modifiziert werden:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_0}{3} + \frac{2\epsilon_0}{3} e^{-T.c.}$$

Die elektrische Kraft wirkt aber — und insofern ist die Analogie mit dem Paramagnetismus nur eine angenäherte — nicht richtend, sondern überlagert sich über das Feld des positiven Kernes. In dieser Beziehung stehen wir durchaus auf dem Boden der von W. Voigt²⁾ entwickelten Anschauungen über den Kerreffekt. In einheitlichen Substanzen, wenn man von den sog. Liqueurs mixtes von Meslin absieht, ist deshalb eine richtende Wirkung des elektrischen Feldes auch auf Farbstofflösungen (Fettfarbe in Öl), die sich als starker Pleochroismus äußern müßte, nicht vorhanden. — Auf den Zeemaneffekt ist dagegen die kinetische Energie der Elektronen ohne Einfluß,

1) Die Messungen bei verschiedener Temperatur, die mit einer Änderung des Aggregatzustandes verbunden waren, sind hierfür natürlich nicht verwertbar.

2) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik p. 353. Leipzig 1908.

da hier die Größe $p(e/m)$ in die Formeln nicht eingeht, die Elektronenzahl überhaupt nicht in Betracht kommt.

§ 11. Die Berechnung von λ_m' .

Wenn für einen kleinen Teil des Spektrums genauere Dispersions- und Absorptionsmessungen vorliegen, so kann λ_m' und damit $p(e/m)$ aus Beobachtungen in einem kleinen Spektralgebiet genau berechnet werden. Wir haben davon in § 13 Anwendung gemacht. In der Beziehung

$$n^2 - \kappa'^2 - 1 = \sum \frac{g \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_m'^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda^2}$$

ist das Summenzeichen über alle Absorptionsgebiete zu erstrecken. Der Einfluß aller nicht im sichtbaren Teil des Spektrums gelegenen Absorptionsgebiete wird gegenüber dem des Absorptionsbereiches selbst klein sein und wird keinen starken Schwankungen unterliegen. Es kann daher unter Vernachlässigung des Summenzeichens unter Einführung einer Konstanten, wie das im analogen Fall schon P. Drude getan hat, gesetzt werden:

$$n^2 - \kappa'^2 - 1 = \frac{g \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_m'^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda^2} + c$$

oder

$$A + C_1 = \frac{g \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda_m'^2)}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda^2},$$

wobei

$$A = n^2 - \kappa'^2$$

und

$$C_1 = -c - 1$$

ist. Entsprechend ist unter Vernachlässigung des Summenzeichens:

$$B = 2n\kappa' = \frac{g g' \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda^2}.$$

Es werden A und B für drei Werte λ aus den zugehörigen Werten n und κ' berechnet. Man hat also A_1, A_2, A_3 und B_1, B_2, B_3 . Es ist

$$\frac{A_1 - C_1}{B_1} = \frac{\lambda_1^2 - \lambda_m'^2}{g' \lambda_1},$$

$$\frac{A_2 - C_1}{B_2} = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_m'^2}{g' \lambda_2},$$

$$\frac{A_3 - C_1}{B_3} = \frac{\lambda_3^2 - \lambda_m'^2}{g' \lambda_3}.$$

Durch Elimination von C_1 aus je zweien der Gleichungen erhält man

$$(A_1 - A_2)g' = \frac{B_1}{\lambda_1}(\lambda_1^2 - \lambda_m'^2) - \frac{B_2}{\lambda_2}(\lambda_2^2 - \lambda_m'^2)$$

und

$$(A_2 - A_3)g' = \frac{B_2}{\lambda_2}(\lambda_2^2 - \lambda_m'^2) - \frac{B_3}{\lambda_3}(\lambda_3^2 - \lambda_m'^2),$$

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3} = \frac{(B_1 \lambda_1 - B_2 \lambda_2) - \lambda_m'^2 \left(\frac{B_1}{\lambda_1} - \frac{B_2}{\lambda_2} \right)}{(B_2 \lambda_2 - B_3 \lambda_3) - \lambda_m'^2 \left(\frac{B_2}{\lambda_2} - \frac{B_3}{\lambda_3} \right)}.$$

Die einzige Unbekannte λ_m' kann daraus berechnet werden. Voraussetzung ist, daß neben α' mindestens drei Werte n genau bekannt sind.

Es sei danach ein Beispiel der Berechnung von λ_m' für Jodeosin angeführt.

λ	n	α'	B	$B \cdot \lambda$	B/λ	A_1	A_2	A_3
470	1,05	0,41	0,86	0,405	1,83	1,10	2,10	4,150
510	1,45	0,82	2,38	1,21	4,66	-0,17	-0,67	-0,025
580	2,04	0,16	0,65	0,38	1,13	0,93	1,43	4,125

$$\begin{aligned} \frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3} &= \frac{-0,50}{-2,70} = 0,185 = \frac{(B_1 \lambda_1 - B_2 \lambda_2) - \lambda_m'^2 \left(\frac{B_1}{\lambda_1} - \frac{B_2}{\lambda_2} \right)}{(B_2 \lambda_2 - B_3 \lambda_3) - \lambda_m'^2 \left(\frac{B_2}{\lambda_2} - \frac{B_3}{\lambda_3} \right)} \\ &= \frac{-0,80 + \lambda_m'^2 \cdot 2,83}{-0,88 + \lambda_m'^2 \cdot 3,53}. \end{aligned}$$

Daraus ist

$$\lambda_m'^2 = 0,272 \cdot 10^{-3},$$

$$\lambda_m' = 522 \mu\mu.$$

Legt man dann noch die folgenden beobachteten Werte zugrunde:

	λ	n	α		λ	n	α
1.	450	1,31	0,20	6.	510	1,45	0,82
2.	470	1,05	0,41	7.	530	2,10	0,74
3.	480	0,92	0,53	8.	540	2,24	0,64
4.	490	0,91	0,66	9.	580	2,04	0,16
5.	500	1,11	0,77				

und berechnet
durch Kom-
bination von

die Größe λ_m'

4, 6, 7	505 $\mu\mu$
3, 6, 8	516
6, 8, 9	512
1, 5, 8	538
1, 6, 9	534
2, 6, 9	522

so erhält man als Mittel

$$= 521 \mu\mu$$

während direkt (vgl. § 5) sich $\lambda_m' = 520 \mu\mu$ ergibt.

Ähnlich ist für Fuchsin aus den Beobachtungen von λ_m' :

	λ	n	x'		λ	n	x'
1.	466	1,00	0,64	4.	562	2,29	1,07
2.	486	1,05	0,96	5.	598	2,60	0,76
3.	524	1,77	1,26	6.	636	2,46	0,38

durch Kom-
bination von

die Größe λ_m'

1, 3, 6	530 $\mu\mu$
2, 3, 4	521
1, 2, 3	540
3, 4, 6	531
1, 3, 5	530

$$\text{Mittel} = 531 \mu\mu$$

direkt gefunden (vgl. § 5) $\lambda_m' = 530 \mu\mu$.

Man sieht, daß die Übereinstimmung von Berechnung und Beobachtung durchaus zufriedenstellend ist. Damit ist die Möglichkeit gegeben, zahlreiche Beobachtungen anderer Forscher, die nach Jamin-Quincke einige Werte von n und x' bestimmt haben, für die Berechnung von $p(e/m)$ zu verwerten.

§ 12. Berechnung von $p(e/m)$ aus dem nach größeren Wellenlängen vom Maximum liegenden Teil der Absorptionskurve.

Wir haben im § 5 eine Methode zur Berechnung von $p(e/m)$ angegeben, wenn der Teil der Absorptionskurve bekannt, der vom Maximum nach kürzeren Wellenlängen sich erstreckt. In vielen Fällen, wenn z. B. das Maximum im Violett liegt, wird man aber nur den nach größeren Wellenlängen

sich erstreckenden Teil leicht feststellen können. Deshalb wurde die Methode auch für diesen Fall erweitert. Es war p. 913 oben

$$(2\kappa_m'^2 + 1)^2 - 1 = \frac{1}{\beta_m'^2} = \frac{g^2 \lambda_m'^2}{g'^2}.$$

Ferner sei

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_m' \sqrt{1 - g_0}}{\sqrt{1 - 4g_0}} = \lambda_m' \sqrt{c_2},$$

wodurch $\lambda_2 > \lambda_m'$, dann wird für λ_2 : $\alpha = -1$ und

$$(3) \quad \kappa_2'^2 = \frac{\sqrt{(2 + \beta_2^2)^2 + \beta_2^2} - (2 + \beta_2^2)}{2(1 + \beta_2^2)}.$$

Hieraus kann κ_2 berechnet werden, wenn man zunächst den aus λ_m' berechneten Wert von $\beta_m'^2 = \beta_2^2$ in (3) einsetzt. Dann wird aus der Kurve für κ_2 der zugehörige Wert von λ_2 entnommen; daraus wird g_0 berechnet. Dann wird nach der Formel

$$\beta_2^2 = \beta_m'^2 \frac{\sqrt{1 - 4g_0}}{\sqrt{1 - g_0}}$$

der genaue Wert von β_2 berechnet, dies wieder eingesetzt, κ_2' neu berechnet und das Näherungsverfahren, genau wie in § 4 beschrieben, durchgeführt. In der Praxis gestaltet sich die Rechnung sehr einfach. Man hat schließlich wieder

$$\frac{3g_0}{1 - g_0} \quad \text{und} \quad p \frac{e}{m} = \frac{\pi}{9660} \frac{M}{d} \frac{g}{\lambda_m'^2},$$

λ_m' liegt vom Maximum der Absorption, wie § 4 gezeigt, um etwa 5—15 $\mu\mu$ nach größeren Wellenlängen verschoben.

Beispiel für die Berechnung nach Methode II.

I. Jodeosin.

$$\lambda_n = 510 \mu\mu; \quad \lambda_m' = 520 \mu\mu; \quad \kappa_m' = 0,79.$$

$$\beta_m'^2 = 0,247; \quad \kappa_2' = 0,146; \quad \lambda_2 = 581 \mu\mu; \quad c_2 = 1,25$$

$$\beta_2^2 = 0,198; \quad \kappa_2' = 0,135; \quad \lambda_2 = 584 \mu\mu; \quad c_2 = 1,25$$

$$g = 0,206. \quad p \cdot \frac{e}{m} = 0,98 \cdot 10^7.$$

gegenüber $1,26 \cdot 10^7$ aus kürzeren Wellen.

Der Unterschied ist dadurch zu erklären, daß bei dieser Methode κ_2 ziemlich weit vom Maximum liegt und bei unseren Messungen an sehr dünnen Schichten nicht genau erhalten

werden konnte. Der exakte aus allen Werten von Absorption und Dispersion nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelte Wert ist $g = 0,257$, also $p(e/m) = 1,17$.

II. Antimonglanz (vgl. § 14).

λ_m' berechnet = 468 $\mu\mu$. \parallel c-Achse.

$$\lambda_m' = 468; \quad \kappa_m' = 2,64.$$

$$\beta_m'^2 = 0,0045; \quad \kappa_2' = 0,024; \quad \lambda_2 = 720 \text{ extrapoliert}; \quad c_2 = 2,31$$

$$\beta_1'^2 = 0,0019; \quad \kappa_2' = 0,016; \quad \lambda_2 = 726 \quad \text{,,} \quad c_2 = 2,40$$

$$\text{eine weitere Durchrechnung gibt } \lambda_2 = 726 \quad \text{,,} \quad c_2 = 2,40$$

woraus

$$g = 0,583. \quad p \cdot \frac{e}{m} = 0,67 \cdot 10^7.$$

Zu den beiden Verfahren der Berechnung von $p \cdot (e/m)$ an festen Substanzen § 5 und § 12 aus der Absorption erster Art sei noch folgendes bemerkt. Wenn κ_m' in der Kurve nicht mehr zu finden ist, so darf es stets extrapoliert werden; denn die Größe von κ_m' beeinflusst das Resultat $p(e/m)$ nur sehr wenig. Ein Fehler bis zu 10 Proz. schadet nichts. Liegt dagegen κ_1' bzw. κ_2' nicht mehr in der Kurve, so darf λ_1 bzw. λ_2 nur in günstigen Fällen durch Extrapolation bestimmt werden. Für jede Extrapolation kann die allerdings umständliche Methode der Rückwärtsrechnung zur Prüfung verwendet werden. Es ist dafür g' aus g und β zu berechnen. Dann werden α und β für die in Frage kommenden Wellenlängen ausgewertet und daraus κ' bestimmt. Die Berechnung von $p \cdot (e/m)$ ist dann ein Annäherungsverfahren.

Die Werte β brauchen nicht sehr genau zu sein, weil die Funktion κ'^2 nur wenig von den Schwankungen von β beeinflusst wird.

Sehr wichtig ist aber die Kenntnis von λ_m' . Dieses sollte auf etwa 5 $\mu\mu$ genau bekannt sein. λ_m' tritt zweimal als Quadrat im Nenner von Brüchen auf derart, daß Fehler in λ_m' das Endresultat in gleichem Sinne und jedesmal stark fälschen. Ist λ_m unbekannt, so daß λ_m' nicht ohne weiteres ermittelt werden kann, so müssen genauere Dispersionsmessungen vorliegen. Dann kann λ_m' nach dem oben § 11 angegebenen Verfahren berechnet werden. Sind die so berechneten Werte λ_m'

sehr verschieden, was bedeutet, daß die Beobachtungen nicht genau sind, so ist es notwendig, das Maximum der Absorption λ_n nachträglich durch Rückwärtsrechnung sicher zu stellen; es ist dann stets bei festen Substanzen mit Absorption erster Art mit genügender Annäherung $\lambda_m' = \lambda_n + \text{ca. } 10\text{--}15 \mu\mu$. Außerdem können zur Prüfung von λ_n bzw. λ_m' die Lagebeziehungen von Absorptions- und Dispersionskurve herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, daß das Maximum der Absorption ungefähr in der Mitte des steilen Anstiegs der Dispersionskurve liegen muß; ferner, daß in der Mitte der Wert der Ordinate zugleich die Größe des Brechungsindex angibt, welcher die nach größeren oder kleineren Wellenlängen vom Maximum aus gelegenen Teile der Dispersionskurve sich asymptotisch nähern.

Aus der richtigen Abschätzung und Berechnung kann λ_m' stets mit einiger Sicherheit bestimmt werden. In jedem Falle kann man durch Rückrechnung die Annahmen kontrollieren.

Das zuerst gegebene Verfahren für die Berechnung von $p.(e/m)$ ist immer dann anwendbar, wenn der vom Maximum der Absorption nach kleineren Wellen gelegene Teil der Absorptionskurve bekannt ist. Die direkten Absorptionsmessungen sollen sich so weit als möglich vom Maximum weg erstrecken und x' mit einem Fehler von nicht mehr als ± 5 Proz. bekannt sein. Die Annäherung ist dann eine so gute, daß in den meisten Fällen eine zweimalige Durchrechnung, immer aber eine dreimalige genügen wird.

Das zweite Verfahren ist anwendbar, wenn die Absorptionskurve vom Maximum nach größeren Wellen gemessen ist. Die Absorptionsmessungen sollen auch hier sich so weit als möglich vom Maximum weg erstrecken. Die Verhältnisse liegen hier etwas ungünstiger als bei dem ersten Verfahren, weil λ_3 stets mehr in den verhältnismäßig flach auslaufenden Teil der Absorptionskurve f  llt. Deshalb sollen auch die x' nach dem Rot hin direkt auf etwa 5–10 Proz. genau gemessen werden. Denn Fehler in x' geben hier bei dem flachen Ausgang der Kurve größere Schwankungen in λ_2 ; λ_2 ist aber für $p.(e/m)$ ausschlaggebend. Bei dem Verfahren nach Jamin-Quincke und bei Absorptionsmessungen an zu dünnen Schichten sind die

Messungen schwacher Absorptionen mit großen systematischen Fehlern behaftet.

Für beide Verfahren ist es günstig, aber nicht unbedingt notwendig, daß λ_n bekannt ist. In Fällen, in denen die Absorptionskurve zu beiden Seiten des Maximums hinreichend weit zugänglich ist, wird man vorteilhaft beide Verfahren anwenden, um die Resultate vergleichen zu können.

§ 13. Berechnung von $p \cdot (e/m)$ aus Dispersion und Absorption
(spez. für Methode nach Jamin und Quincke).

Diese angenäherte Rechnung ist verwendbar, wenn nur für etwa zwei Wellenlängen Brechungs- und Absorptionsindex genau gemessen und die Lage des Absorptionsmaximums bekannt sind.

Man setzt

$$(1) \quad B = 2n\kappa' = \frac{g g' \lambda^3}{(\lambda^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda^2}.$$

Dann ist

$$\text{für } \lambda_1 \quad . \quad . \quad . \quad B_1$$

$$\text{für } \lambda_2 \quad . \quad . \quad . \quad B_2$$

und

$$(2) \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3} \cdot \frac{(\lambda_2^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda_1^2}.$$

Für $\lambda_2 = \lambda_m'$ ist

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_m'^3} \cdot \frac{g'^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_m'^2)^2 + g'^2 \lambda_1^2}.$$

Hieraus erhält man g' , aus (1) läßt sich dann g berechnen; dann ist wieder, da λ_m' bekannt sein soll,

$$p \cdot \frac{e}{m} = \frac{\pi}{9660} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{g}{\lambda_m'^2}.$$

Kleine Fehler in den Bestimmungen von n und κ' machen sich sehr stark geltend; die Resultate geben daher nur die Größenordnung von $p(e/m)$, ob Elektronen oder Ionen schwingen.

Beispiele:

1. Jodeosin. $\lambda_m' = 520 \mu\mu$; $g' = 0,072$; $g = 0,390$; $p \cdot \frac{e}{m} = 1,84 \cdot 10^7$.
2. Fuchsin. $\lambda_m' = 530 \mu\mu$; $g' = 0,082$; $g = 0,71$; $p \cdot \frac{e}{m} = 2,4 \cdot 10^7$.

§ 14. Berechnung der schwingenden Elektronen bei Substanzen mit metallischer Leitung.¹⁾

1. Eisenglanz.

Den Berechnungen wurden die Daten von F rsterling²⁾ und W lfing³⁾ für den ordentlichen Strahl zugrunde gelegt. Für λ_m' berechnen sich daraus etwas verschiedene Werte. Die durch das elektrische Leitvermögen verursachte kontinuierliche Absorption konnte hier und bei Antimonglanz wegen ihrer relativ geringen Größe vernachlässigt werden.

Aus	λ	n	κ'
	446	2,84	0,866
	565	2,92	0,368
	592	2,88	0,317

ergibt sich nach der Methode von § 11 $\lambda_m' = 372 \mu\mu$. Kombination anderer Beobachtung geben ziemlich verschiedene Werte von λ_m' , die um $20 \mu\mu$ größer und kleiner sind. Das liegt zum Teil wohl an der Schwierigkeit der Beobachtungen. (Die nach der Prismenmethode von W lfing gewonnenen ganz genauen Werte reichen nur bis zur *D*-Linie.)

Dieser Wert wurde den weiteren Berechnungen zugrunde gelegt und dürfte auch aus folgendem Grunde ungefähr richtig sein. Das Maximum der Absorption liegt stets etwa in der Mitte des starken Anstiegs der Dispersionskurve, deren vom Maximum nach größeren und nach kleineren Wellen gelegene Teile sich asymptotisch derjenigen Horizontalen nähern, welche ebenfalls durch die Mitte des Anstiegs geht. Aus diesen Beziehungen läßt sich λ_m' angenähert bestimmen. Es liegt für Eisenglanz etwa bei $350 \mu\mu$, so daß $\lambda_m' = 372 \mu\mu$ vermutlich angenähert richtig ist.

$$\lambda_m' = 372 \mu\mu. \quad \kappa_m' \text{ extrapoliert} = 1,4.$$

(Nach der Methode von § 12.)

$$\beta_m'^2 = 0,0482; \quad \kappa_2' = 0,071; \quad \lambda_2 = 700 \text{ extrap.}; \quad c_2 = 3,58.$$

$$\beta_2'^2 = 0,0136; \quad \kappa_2' = 0,087; \quad \lambda_2 = 760 \text{ extrap.}; \quad c_2 = 4,16.$$

1) Inzwischen sind sehr interessante Beobachtungen und Berechnungen von Hrn. W. Meier, von Hrn. W. Voigt veranlaßt, erschienen (Ann. d. Phys. 31. p. 1047. 1910), die auf anderem Wege, als wir ihn eingeschlagen, bei Metallen die Zahl der schwingenden (nicht freien) Elektronen ergeben.

2) C. Försterling, Beibd. d. N. J. f. Min. 25. p. 344. 1907.

3) E. A. W lfing, Tschermaks Mitt. 15. p. 71. 1896.

Eine weitere Durchrechnung gibt wieder $\lambda_2 = 760 \mu\mu$.
 $g = 0,76$ und hieraus

$$p \cdot \frac{e}{m} = 0,55 \cdot 10^7.$$

g' ergibt sich zu $5,96 \cdot 10^{-6}$ und $g'_0 = 1,43 \cdot 10^{-6}$.

Daraus wurde κ' berechnet für

λ	κ'	λ	κ'
320	0,98	372	1,40
340	1,34	730	0,04
360	1,53	770	0,035

Das Maximum der Absorption fällt danach angenähert mit dem schätzungsweise ermittelten zusammen; es ist gleichzeitig ersichtlich, daß die Bestimmung von λ_2 durch Extrapolation richtig ist.

Die Absorption ist durch das negative Elektron verursacht und zwar schwingt vermutlich auf je zwei Moleküle ein Elektron.

2. Antimonglanx.

Die Daten für die Berechnung stammen von E. C. Müller.¹⁾ Aus mehreren Berechnungen ergibt sich λ_m' übereinstimmend $= 468 \mu\mu$ für einen Strahl $\parallel c$.

λ	n	κ'	λ	n	κ'
589	5,12	0,633	434	4,65	3,17
527	5,47	1,28	434	5,17	2,75
510	5,48	1,67	486	5,53	2,23

$\lambda_m' = 468 \mu\mu$.

$\lambda_m' = 469 \mu\mu$.

Die Messungen zeigen, wie man aus diesen Kombinationen sieht, eine ausgezeichnete Übereinstimmung.

$$\lambda_m' = 468 \mu\mu. \quad \kappa_m' = 2,64.$$

$$\beta_m'^2 = 0,0045; \quad \kappa_2' = 0,024; \quad \lambda_2 = 720 \mu\mu \text{ extrap.}; \quad c_2 = 2,31.$$

$$\beta_2'^3 = 0,0019; \quad \kappa_2' = 0,016; \quad \lambda_2 = 726 \mu\mu \text{ extrap.}; \quad c_2 = 2,40.$$

Eine weitere Durchrechnung gibt wieder $\lambda_2 = 726 \mu\mu$. Die Extrapolation des zugehörigen Wertes von κ_2' macht das Resultat etwas, aber nicht sehr unsicher. $g = 0,583$ und hieraus

$$p \cdot \frac{e}{m} = 0,67 \cdot 10^7.$$

Die Absorption ist durch das negative Elektron verursacht; auch hier schwingt auf etwa zwei Moleküle ein Elektron.

1) E. C. Müller, Beilbd. d. N. J. f. Min. 17. p. 187. 1903.

Zu diesen Berechnungen ist folgendes zu bemerken. Die Beobachtungen, wenigstens für Antimonglanz, sind, wie aus der vorzüglichen Übereinstimmung der berechneten λ_m' hervorgeht, so genau, daß der Wert 0,67 für $p(e/m)$ nicht auf Fehlern beruhen kann. Da für Absorption im sichtbaren Spektrum 1,35 etwa der normale Wert wäre, so ist bei Antimonglanz sicher, bei Eisenglanz wahrscheinlich auf 2 Moleküle der Formel Sb_2S_3 bzw. Fe_2O_3 ein schwingendes Elektron vorhanden, dessen Absorptionsmaximum in der Nähe des sichtbaren Gebietes liegt. Diese Tatsache könnte auf verschiedene Weise gedeutet werden. Vielleicht ist als Molekularformel im festen Zustand der doppelte Wert $(\text{Sb}_2\text{S}_3)_2$ und $(\text{Fe}_2\text{O}_3)_2$ zu nehmen und ein die Bindung dieses Doppelmoleküls veranlassendes Valenzelektron als Schwingungs- oder Dispersionselektron zu betrachten; doch bietet das chemisch einige Schwierigkeiten; es spricht auch die Verschiedenheit der Kristallsysteme, in welches die beiden Verbindungen kristallisieren, dagegen. Oder es könnte ein Zusammenhang mit der metallischen Leitfähigkeit, die beide Verbindungen zeigen, bestehen. Es ist auffallend, daß alle Oxyde und Sulfide, die Elektronenleitung besitzen, auch eine selektive Absorption zeigen, die sich mehr oder minder weit in das sichtbare Gebiet erstreckt. Über diese lagert sich dann die kontinuierliche Absorption, deren Stärke zum Teil durch die Leitfähigkeit, also durch die freien Elektronen bestimmt ist. Allerdings beträgt die Zahl der freien Elektronen pro Molekül in Antimonglanz bei 15° weniger als $1/10000$, bei Eisenglanz weniger als $1/10$. Die abzuziehende Zahl der frei gewordenen Elektronen könnte also die Herabminderung auf $1/2$ nie erklären.

Aber die kontinuierliche Absorption in diesen Substanzen genügt nicht entfernt der Beziehung von Maxwell, sondern ist für große wie kleine Wellenlängen bei geringem Leitvermögen dieser Substanz weit größer, als dem ersteren entspricht.¹⁾ Demnach könnten die elektromagnetischen Schwingungen noch einen weit größeren Teil der Elektronen frei machen, als aus der Leitfähigkeit ohne Belichtung gemessen wird, und dieser wäre dann abzuziehen. Das müßte sich wohl im Leitvermögen kundgeben; Frl. H. Landschütz ist damit beschäftigt, das zu prüfen. —

1) Vgl. Physik. Zeitschr. 4. p. 495. 1903.

Ob mit Zunahme der Leitfähigkeit bei steigender Temperatur wirklich die selektive Absorption ebenso abnimmt, wie die kontinuierliche zunimmt, ist noch ganz unsicher. Das müßte zutreffen, wenn die Dispersionselektronen der Lichtabsorption abdissoziieren und zu Leitungselektronen würden. Versuche an Molybdänglanz scheinen darauf zu deuten, doch stehen uns zu einer genaueren Prüfung die Mittel vorläufig nicht zur Verfügung. —

Aus den etwa bis 30—40 μ reichenden Messungen der Absorption, die der eine von uns ausgeführt hat, geht hervor, daß bei Eisenglanz und Antimonglanz eine merkliche Eigenschwingung im Ultrarot, die nach P. Drude auf Ionen zurückzuführen ist, fehlt.

§ 15. Mögliche Deutung der Dämpfung der Eigenschwingungen und die vier Arten von Absorption und Emission.

H. A. Lorentz¹⁾ hat gezeigt, daß bei Kohlensäure- und Natriumdampf die Dämpfung der Eigenschwingung nicht durch Strahlung erfolgen kann, die eine viel zu kleine Dämpfung gibt, sondern seiner Ansicht nach durch Molekülstöße bewirkt sein muß. Wir haben im § 2 für feste Körper auf Grund unserer Messungen quantitativ nachweisen können, daß die Dämpfung jedenfalls viel größer ist als die Strahlung allein sie verursachen könnte, und erwähnten, daß sie merkwürdigerweise von annähernd derselben Größe ist wie für die zwei von Lorentz für die Berechnung verwandten Gase, konnten aber nicht entscheiden, ob sie, was Lorentz und J. Becquerel wegen der Zunahme proportional \sqrt{T} annehmen, durch die Zusammenstöße der Moleküle verursacht ist. Neuerdings hat dann J. Natanson²⁾ auf Grund seiner Berechnungen der Beobachtungen von Abbot und Fowles über die Absorption der Luft gezeigt, daß nach Lorentz die Dämpfung etwa 20 mal größer sein müßte als sie wirklich ist. R. Ladenburg³⁾ fand für die rote Wasserstofflinie ebenfalls, daß die Strahlung allein eine viel geringere, als die wirklich vorhandene Dämpfung gibt, glaubt aber, daß die Annahme von Lorentz sie er-

1) H. A. Lorentz, Versl. K. Akad. Wetensch. p. 609. 1905.

2) L. Natanson, Bull. Ac. Sc. Cracovie p. 973. Dez. 1909.

3) R. Ladenburg, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 73. 1910.

klären können. Versuche, die Hr. Küpferer und der eine von uns angestellt haben, zeigen aber, daß die Dämpfung bei der Absorption in dem Dampf von Anilinfarbstoffen nahezu¹⁾ die gleiche wie im festen Zustand ist. Hierbei haben wir den Dampfdruck von 10 mm bis auf 0,0001 mm sinken lassen. Die Absorption erstreckte sich kontinuierlich über ein gleich großes Spektralgebiet wie im festen Zustand; die Dichte beträgt dann aber etwa den $\frac{1}{10000}$ Teil.

Die Molekülstöße und die Dämpfung mußten somit auch $\frac{1}{10000}$ betragen, während sie in Wirklichkeit nahezu konstant bleiben. Daher muß auch die Annahme von Lorentz unserer Ansicht nach aufgegeben werden. Es wäre auch sonst unerklärlich, warum bei der Absorption zweiter Art, die mit der Phosphoreszenz in engem Zusammenhang steht, die Absorptionsgebiete soviel schmaler und schärfer, die Dämpfung also bedeutend geringer ist als bei der Absorption erster Art (vgl. § 1). Die *Dämpfung* muß vielmehr *innermolekular* sein, und damit steht auch unsere Annahme in § 10 von der kinetischen Eigenenergie der gebundenen Elektronen in Einklang. Wir sehen daraus ferner, daß *zwischen der selektiven kontinuierlichen Absorption der festen, flüssigen und gasförmigen Körper und der Linien bzw. Bandenabsorption* (wobei die Banden sich in Linien auflösen lassen) *ein durchgreifender Unterschied besteht.*²⁾ Wir schlagen folgende Unterscheidung vor:

1. Selektive kontinuierliche Absorption und Emission erster Art; ein oder mehrere Elektronen oder Ionen pro Molekül; starke innermolekulare Dämpfung g' von der Größenordnung 10^{-6} .

2. Selektive kontinuierliche Absorption und Emission zweiter Art oder Absorptionsstreifen, wie sie H. Kayser vielfach nennt, mit $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{10000}$ Elektronen oder Ionen pro Molekül; die Dämpfung g' von 10^{-7} bis 10^{-10} .

3. Die Absorption und Emission in Gasen von Banden, die aus Linien bestehen und sich in solche auflösen lassen und

1) Die genauen Angaben und Rechnungen werden später publiziert werden.

2) Der eine von uns (Koenigsberger) hatte früher die entgegengesetzte Ansicht ausgesprochen (Ann. d. Phys. 1900), die er jetzt aber auf Grund der neuen Versuche für unrichtig hält.

für welche z. B. die Gesetze von Deslandres gelten; für diese ist die Elektronenzahl und Dämpfung noch nicht berechnet. Sie hängt bei der Absorption nach den Versuchen von Hrn. Kupperer sicherlich mit der *chemischen* Dissoziation zusammen.

4. Die Absorption und Emission in Gasen von Linien, für welche die Serienformeln gelten. Für diese ist vielleicht etwa 1 Elektron pro Atom vorhanden, falls man annimmt, daß nur ein Teil des Gases sich in dem Zustand der Emission und Absorption von Linien befindet. Sie hängt nach den Untersuchungen von Fuchtbauer, Stark u. a. wahrscheinlich mit der *elektrischen* Dissoziation zusammen. Alle vier Arten sind Temperaturphänomene und dem zweiten Hauptsatz unterworfen.

Zusammenfassung. (Erster und zweiter Teil.)

1. Es werden *zwei* Arten selektiver Absorption fester und flüssiger Substanzen unterschieden. Die *erste* Art ist durch schwingende Teile (Elektronen und Ionen) des chemischen Moleküls bedingt, und durch Einwirkung auf das Reflexionsvermögen, die Größe von $n\kappa$ und die Breite des Absorptionsgebietes charakterisiert. Die *zweite* Art selektiver Absorption ist durch Moleküle verursacht, die nur in geringer Zahl (weniger als 1 Proz. des chemischen Moleküls) in dem Körper vorkommen und durch die chemische Formel und Zusammensetzung derselben nicht ausgedrückt werden. Diese Absorption hat auf das Reflexionsvermögen keinen erheblichen Einfluß, $n\kappa$ ist für sie stets kleiner als 0,1, die Breite des Absorptionsgebietes ist sehr gering $< 0,1 \mu$. Für diese zweite Art der Absorption lassen sich im allgemeinen strenge Gesetzmäßigkeiten nicht feststellen, weil wir das betreffende Molekül seiner chemischen Zusammensetzung nach nicht kennen, und weil dessen chemische und physikalische Umwandlungen mit denen der Substanz selbst nicht direkt zusammenhängen. Im ganzen gelten angenähert dieselben Beziehungen wie für die Absorption erster Art. Das Folgende bezieht sich jedoch *nur* auf die *Absorption erster Art*.

2. Vergleicht man die spezielleren elektromagnetischen Dispersionstheorien von Helmholtz-Reiff-Drude, von Lorentz und von Planck mit den Beobachtungen des § 3, so ist für feste Körper bei gewöhnlichen Temperaturen die Dämpfung der Eigenschwingung viel, etwa 10000 mal,

größer, als sich aus der Strahlung allein ergeben würde. Die Annahme, daß die Dämpfung durch Molekülstöße verursacht wird, wäre mit den im ersten Teil auseinandergesetzten Tatsachen in Einklang zu bringen, ist aber nach neueren Messungen der Absorption in äußerst verdünnten Dämpfen durch Hrn. Küpferer nicht mehr haltbar. Die Meinung, daß die Endformeln der Theorie von Lorentz und der ersten Theorie von Planck nicht mit den Dispersionsmessungen stimmen, beruht, wie gezeigt wurde, auf einem rechnerischen Fehlschluß. Da eine Annahme in der Theorie von Lorentz wohl strenger ist als in der Theorie von Helmholtz, wurde die erstere den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt.

3. Die durch die Theorie von Helmholtz angeregte, von Reiff, Lorentz und namentlich Drude ausgeführten Berechnungen von e/m für die schwingenden Teile erlauben anzugeben, wieviel negative Elektronen, ferner wie Drude zuerst zeigte, welche und wieviel Ionen im Molekül schwingen. Wegen der Bedeutung dieser Folgerungen für die Erklärung des elektrischen Leitvermögens und anderer physikalischer Eigenschaften und für die Erweiterung der chemischen Valenzlehre wurde versucht, ohne Kenntnis der Dispersionskurve direkt aus der Absorption $p \cdot (e/m)$ zu berechnen. Die Formeln hierfür sind auf Grund der Umformungen von M. Planck entwickelt und an unsern Beobachtungen geprüft. Damit kann das große Material von Absorptionskurven im ganzen Spektrum von 0,2 bis 80μ zur Beantwortung dieser Fragen herangezogen werden. Die Berechnung von $p(e/m)$ aus der Absorption ist der aus der Dispersion vorzuziehen, da benachbarte Eigenschwingungen auf diese häufig keinen wesentlichen und jedenfalls erkennbaren und trennbaren Einfluß haben und dadurch keinen Fehler verursachen können, wie das bei der Dispersion der Fall ist.

4. An Farbstoffen wie Jodeosin, Fuchsin, Cyanin ist die Absorption (die Farbe) im sichtbaren Spektrum auf die Eigenschwingung eines negativen Elektrons zurückzuführen, für welches $p \cdot (e/m)$ etwa $= 1,3 \cdot 10^7$ ist.

5. Aus unseren Beobachtungen über die Absorptionskurven von festem Jodeosin, Fuchsin, Cyanin, Alkaliblau, Echtblau, Titandioxyd (Rutil und Brookit), Chlorit, Chromglas, Eisenoxyduloxydglas, Uranglas, Staurolith, Biotit folgt: Mit

steigender Temperatur verschiebt sich die Absorptionskurve nach größeren Wellenlängen; gleichzeitig findet eine Verbreiterung des Absorptionsgebietes und eine Abnahme des Maximums der Absorption statt. Aus diesen Tatsachen folgt, daß bei zunehmender Temperatur die Absorption im sichtbaren Spektrum (und damit die Färbung) roter, gelber und rotbrauner Körper stärker zunimmt, als *cet. par.* die Absorption (und Farbe) grüner und blauer Körper abnimmt.

Wir haben für zwei Farbstoffe die Änderung der sämtlichen Dispersions- und Absorptionskonstanten mit der Temperatur berechnet. Daraus ergibt sich, daß erstens die *quasielastische* Kraft auf das Elektron mit steigender Temperatur *abnimmt* und damit nach Nagaoka der Abstand Kern—Elektron sich vergrößert. Zweitens nimmt die *Zahl der schwingenden Elektronen* oder $p(e/m)$ etwas ab. Drittens nimmt die *Dämpfungs-konstante* der Theorie von Lorentz nach dem Gesetz von J. Becquerel mit der Wurzel aus der absoluten Temperatur zu.

6. Wir haben für einige Metalloide aus Beobachtungen von Martens, Coblenz, Fricke, Wood, Pfund u. a. die Konstanten der Eigenschwingungen zu berechnen gesucht. Es zeigt sich, daß in Übereinstimmung mit der etwas modifizierten Valenztheorie von Abegg in den Elementen der Bromgruppe ein negatives Elektron pro Atom, in denen der Selengruppe zwei negative Elektronen, in denen der Phosphorgruppe drei negative Elektronen schwingen. Ionenschwingungen treten im Ultrarot bei Wellenlängen unter 20μ nur auf, wenn ein Ion gegen einen anderen größeren Massenkomplex schwingen kann, also nicht bei einem aus zwei Atomen bestehenden Molekül wie Br_2 oder Se_2 usw.

7. Die Schwingungsdauer und damit die Wellenlänge der gedämpften Eigenschwingungen fällt, wie sich theoretisch zeigen läßt, nicht mit derjenigen der maximalen Absorption zusammen.

8. Der Wert von $p(e/m)$ nimmt mit steigender Temperatur ab. Hieraus erklärt sich, daß der optisch von P. Drude und später von H. Erfle aus zahlreichen Dispersionsbestimmungen bei Zimmertemperatur abgeleitete sog. „optische“ Wert von e/m scheinbar kleiner als $1,78 \cdot 10^7$ ist. Wir haben im § 10 zu zeigen versucht, daß er bei 0° abs. Temp. wahrscheinlich $1,78 \cdot 10^7$, bei sehr hoher Temperatur sich dem Wert $\frac{1}{3} \cdot 1,78 \cdot 10^7$

nähert. Die Art, wie e/m sich mit steigender Temperatur dem Wert $\frac{1}{3} \cdot 1,78 \cdot 10^7$ nähert, hängt von der Wellenlänge der Eigenschwingung ab; die Konstante c_1 nimmt mit zunehmender Wellenlänge zu.

9. Die verschiedenen Methoden, nach denen man in einfacher Weise aus der Absorption e/m berechnen kann, wurden zusammengestellt und gezeigt, daß man schon aus sehr wenigen Beobachtungen auf der einen oder anderen Seite des Maximums exakte Werte erhalten kann.

10. Auch an Substanzen mit schwacher metallischer Leitung wie Eisenglanz und Antimonglanz läßt sich aus der Absorptionskurve die Zahl und Natur der gebundenen schwingenden Teile ermitteln. Es sind da nur Elektronen, keine Ionen vorhanden.

11. Wir haben gezeigt, daß die Dämpfung der Eigenschwingung der Elektronen im wesentlichen nicht durch Strahlung bewirkt sein kann. Die Dämpfung kann aber, wie dargelegt, auch nicht durch Molekülstöße erfolgen, obwohl sie \sqrt{T} aus proportional ist, sondern muß, wie sich experimentell aus dem Verhalten ganz verdünnter Farbstoffdämpfe ergibt, durch innermolekulare Vorgänge bewirkt sein. Wir unterscheiden vier verschiedene Arten von Absorption und Emission, die auf physikalische und chemische Ursachen zurückzuführen sind.

(Eingegangen 23. März 1910.)

Nachtrag.

Über die Einheitlichkeit der Absorptionsstreifen bei Absorption erster Art.¹⁾

Bekanntlich zeigte sich bei den ersten exakten Prüfungen der Ketteler-Helmholtzschen Dispersionsformeln im sichtbaren Gebiet, daß dem Zusammenhang zwischen den Absorptions- und Brechungsindizes in manchen Fällen nicht durch Annahme eines Schwingungsgebietes im sichtbaren Spektrum genügt werden kann. Ketteler²⁾ fand mit Hilfe seiner Dis-

1) Die folgenden Ausführungen sind durch freundliche mündliche Mitteilungen von Hrn. W. Voigt angeregt.

2) E. Ketteler, Theoret. Optik, Braunschweig 1885.

pensionsformel, daß zwar die Eigenschwingungen im Ultraviolett einfache Absorptionsgebiete hervorrufen, daß aber andererseits auch für Lösungen der damals hergestellten Farbstoffe häufig eine Zerlegung in mehrere Absorptionsgebiete mit etwas verschiedener Eigenschwingung notwendig war.

Auch an einigen festen Farbstoffen z. B. gerade bei der sehr genauen Untersuchung von Pflüger¹⁾ an Cyanin²⁾ war das Verhalten besonders auffallend. Man sieht schon aus der Kurve für die Extinktionsindizes (l. c., Taf. I), daß die Absorption auch im sichtbaren Gebiet nicht einheitlich sein kann, und auch ein Blick auf die Dispersionskurve ergibt dasselbe. Pflüger setzt sie aus sieben Partialbergen zusammen, indem er seine Beobachtungen streng verwertet. Im wesentlichen dürfte aber, wie die Kurven zeigen und wie auch daraus folgt, daß das früher käufliche Cyanin ein Gemenge von hauptsächlich zwei Substanzen ist, eine Substanz mit einem Absorptionsmaximum bei etwa $635 \mu\mu$ und einem Absorptionsstreifen im Ultraviolett bei etwa $370 \mu\mu$ beginnend und eine andere, deren Absorptionsmaximum im sichtbaren Gebiet bei etwa $570 \mu\mu$ liegt und die erst weiter im Ultraviolett ein Absorptionsmaximum jenseits von $300 \mu\mu$ hat, vorhanden gewesen sein. R. W. Wood hat bei seinen Versuchen das erste in überwiegender Menge, A. Pflüger das zweite gehabt.

Fuchsin war ebenfalls früher und ist auch jetzt noch nicht rein erhältlich. Auch einige der von R. A. Houston³⁾ untersuchten Substanzen zeigten keine einheitliche Absorption; jedoch betreffen diese Fälle nicht Absorption erster Art im festen Zustand. Die reinen Farbstoffe haben, wie auch aus den eingehenden Untersuchungen an Lösungen von Uller und Wood⁴⁾ folgt, meist nur *einen* einheitlichen Absorptionsstreifen im sichtbaren Gebiet und andere mehr oder weniger weit entfernte Absorptionsstreifen im Ultraviolett und Ultrarot, die zum Teil auch die Absorptionskurve im Violett oder Rot beeinflussen können.

1) A. Pflüger, Wied. Ann. 65. Taf. I, Fig. 8 (berichtigte Kurve). 1898.

2) Erst seit 4 Jahren etwa werden die einzelnen Komponenten des mit Cyanin bezeichneten Gemenges rein dargestellt (von Bayer & Co. in Elberfeld).

3) R. A. Houston, Ann. d. Phys. 21. p. 575. 1906.

4) K. Uller u. R. W. Wood, Carn. Institut.

Die eingehenden Untersuchungen von H. Rubens und von F. Martens über den Zusammenhang der Dispersion mit der Absorption und die weit in das Ultrarot und Ultraviolett ausgedehnten Prüfungen der Ketteler-Helmholtz'schen Formel an festen Substanzen zeigten, daß die Absorptionsgebiete im wesentlichen einfache zusammengesetzte sind und auch die nahezu ganzzahligen Werte von p als Faktor von e/m , die P. Drude fand, weisen darauf hin. Bei reinen festen Substanzen scheinen die einzelnen Absorptionsgebiete doch meist so weit auseinander zu liegen, daß die Überlagerung der Absorptionen verschiedener Eigenschwingungen in der Mehrzahl der Fälle nur für das Auslaufen der Absorptionskurve und nicht in der Nähe des Maximums in Betracht kommt. Für die meisten Substanzen, die Absorption im sichtbaren Gebiet zeigen, wird es vollkommen genügen, den Einfluß der Absorptionsgebiete im Ultrarot und Ultraviolett durch ein Glied von der Form $c \cdot \lambda^{\pm 2}$ darzustellen.

Für die exakte Berechnung von $p(e/m)$ genügt es, dann einfach die durch diese benachbarten Absorptionen verursachten Absorptionskoeffizienten abzuziehen.

Ermittelt wird die Größe dieser Absorptionskoeffizienten, die von Eigenschwingungen im Ultrarot und Ultraviolett herühren, durch Auswertung der Absorptionskurve nach der unten gegebenen Formel.¹⁾ Wir wollen gleich an zwei Beispielen unsere Behauptung prüfen und zeigen, daß innerhalb der Versuchsfehler die folgende Formel genügt, wovon der zweite Teil die Gleichung von Planck²⁾ ist.

$$\kappa'^2 = \frac{a_v}{\lambda^2} + a_r \lambda^2 + \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2} - (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Für Jodeosin kann man a_r und $a_v = 0$ setzen und die einfache Formel genügt, wie aus folgender Tabelle hervorgeht. Es ist

$$\alpha = \frac{\lambda_m'^2}{g \lambda^2} - \frac{1}{g}; \quad \beta = \frac{g'}{g \lambda};$$

1) Praktisch genügt auch häufig, die Kurve zu beiden Seiten des Maximums graphisch durch Zurückführen auf den kleineren Wert symmetrisch zu machen.

2) Vgl. die Anwendung der Gleichung von M. Planck in Ann. d. Phys. 28. p. 912. 1909.

wir setzen

$$\lambda_m' = 0,520 \mu; \quad g' = 6,80 \cdot 10^{-6}; \quad g = 0,257.$$

Dann ist:

λ	x' (beob.)	x' (ber.)
450	0,22	0,21
470	0,41	0,42
490	0,67	0,68
510	0,82	0,82
530	0,69	0,69
550	0,40	0,42
570	0,21	0,23

Die Absorptionskurve des Fuchsins besteht aus einem Hauptanteil, für den $\lambda_m' = 0,540 \mu$; $g' = 10,4 \cdot 10^{-6}$; $g = 0,63$ und einer schwachen Absorption, die von einer in geringer Menge vorkommenden Substanz herrührt, für die $g = 0,10$; $g' = 4,86 \cdot 10^{-6}$ ist.

Hauptkurve λ	x' (beob.)	x' (ber.)
0,460	0,52	0,58
0,490	1,03	1,02
0,510	1,21	1,22
0,520	1,27	1,24
0,530	1,23	1,22
0,570	0,71	0,74
0,590	0,61	0,54

(Eingegangen 30. April 1910.)

Berichtigung von Druckfehlern in Teil I.

(Ann. d. Phys. 28. p. 889. 1909.)

- p. 893 Z. 7 u. 8: g_0' statt g' . Z. 9: 6,47 statt 6,20. Z. 10 u. 13: g_0' statt g' . Z. 18 u. 20: g_0' statt g' ; ebenso Anm. 1.
 p. 897: Gleichung Z. 9: $1/4\pi$ statt $1/2\pi$; dasselbe Z. 12. Weiter unten $\text{tg } 46^\circ 7'$ statt $\text{tg } 46^\circ 71'$.
 p. 901 Z. 5 v. u.: Ultraviolett statt Ultrarot.
 p. 909 Z. 3: $63 \mu\mu$.
 p. 912: Zweite Gleichung v. u.: $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha)^2 + \beta^2}$.
 p. 913: Zweite Gleichung: $\beta_m'^2$ statt β'^2 . Letzte Gleichung:

$$p \frac{e}{m} = \pi \frac{1}{9660} \frac{M}{d} \frac{g}{\lambda_m'^2}.$$

**7. Nachtrag zu meiner Entgegnung¹⁾
auf die Arbeit von Hrn. Rudolf: Die Edelgase
und die Zustandsgleichung. II;
von Hans Happel.**

Bei der für Argon durchgeführten Berechnung der Verdampfungswärme r und des spezifischen Volumens v_2 der in Koexistenz mit dem gesättigten Dampfe stehenden flüssigen Phase habe ich bisher zwei übrigens recht geringfügige Vernachlässigungen gemacht, ich habe nämlich angenommen, daß der gesättigte Dampf dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz gehorcht und außerdem habe ich v_2 als unbedeutend gegen das spezifische Volumen v_1 der zugehörigen Dampfphase angenommen. Im folgenden möchte ich nun zeigen, daß man auch alle Größen ohne irgend welche Vernachlässigungen berechnen kann und auch dann noch eine recht gute Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen und der verbesserten van der Waalsschen Gleichung erhält.

Zur Berechnung von r dient die streng gültige Gleichung:

$$(1) \quad r = (v_1 - v_2) T \frac{dp}{dT}.$$

Will man nun für irgend eine absolute Temperatur T die rechts stehenden Größen ermitteln, so benutze man zur Darstellung der Dampfspannung p als Funktion von T die in meiner letzten Arbeit¹⁾ erwähnte Gleichung von Keindorff, aus dieser berechne man das zu T gehörige p . Setzt man diesen Wert von p und das zugehörige T , welche sich beide auf den gesättigten Dampf beziehen, in die verbesserte van der Waalssche Gleichung ein, so ergibt sich daraus das zugehörige v_1 . Die Größe dp/dT in (1) berechnet sich ebenfalls aus der Gleichung von Keindorff. Für v_2 kommt in (1) nur ein Näherungswert in Betracht, dieser darf bei Argon für alle

1) H. Happel, Ann. d. Phys. 31. p. 841. 1910.

Temperaturen zwischen $T = 84^\circ$ und $T = 90^\circ$ gleich 0,7 gesetzt werden, die Richtigkeit dieser Annahme wird sich gleich ergeben. In dieser Weise lassen sich alle zur Bestimmung von r nötigen Daten finden. Ich hatte nun in einer früheren Arbeit¹⁾ für r mittels der verbesserten van der Waalschen bzw. einer noch allgemeineren Gleichung einen Ausdruck abgeleitet, dieser lautet speziell für die verbesserte van der Waalssche Gleichung

$$(2) \quad r = p(v_1 - v_2) + a \left\{ \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right\}.$$

Setzt man in dieser streng gültigen Beziehung für p , v_1 und r die eben berechneten Werte ein und für a die früher von mir für Argon gefundene Zahl, so läßt sich v_2 nach der letzten Gleichung ermitteln. Die so erhaltenen Werte für v_2 bei $T = 84,89^\circ$ und $87,77^\circ$ sind in der folgenden Tabelle angegeben, und zwar in der mittelsten Horizontalreihe. Sie stimmen recht gut mit den beobachteten Daten für v_2 überein, die sich in der darüber stehenden Reihe befinden, zugleich erkennt man, daß auch der angenommene Näherungswert für v_2 , der auch in (2) im Glied $p(v_1 - v_2)$ in Beziehung kommt, richtig ist.

Man kann nun auch p als Funktion von T durch die empirische van der Waalssche Beziehung

$$(3) \quad \log p_* - \log p = f \left(\frac{T_*}{T} - 1 \right)$$

darstellen, wobei f in dem hier in Betracht kommenden Intervall und sogar in einem noch größeren als konstant anzusehen ist, und zwar ist nach Hrn. Rudolf²⁾ $f = 2,196$, hierbei sind für p_* und T_* die Ramsay und Traversschen Zahlen angenommen. Berechnet man p und dp/dT aus (3) (statt aus der Keindorffschen Gleichung), verfährt man aber im übrigen mit Benutzung von (1) und der verbesserten van der Waalsschen Gleichung genau wie früher, so ergeben sich bei $T = 85^\circ$ und 89° Werte für v_2 , die in der Tabelle und zwar in der vorletzten Horizontalreihe zusammengestellt sind. Auch sie stimmen gut mit den Messungen überein.

1) H. Happel, Ann. d. Phys. 21. p. 366 u. 367. 1906.

2) G. Rudolf, Ann. d. Phys. 31. p. 418. 1910.

Endlich habe ich noch v_2 in analoger Weise wie eben, jedoch mittels der ursprünglichen van der Waalsschen Gleichung berechnet, wobei ich für a und b die von Hrn. Rudolf¹⁾ ermittelten Zahlen annahm. Hierbei wurden p und dp/dT aus (3) gefunden. Die so für v_2 gewonnenen Daten bei $T = 85^\circ$ und 89° stehen in der letzten Reihe der Tabelle. Bei Benutzung der Keindorffschen Formel würden sich für v_2 Werte ergeben, die mit den in der letzten Reihe stehenden gut übereinstimmen.

$T =$	84,89	85	87,77	89
$v_{2\text{beob.}} =$	0,705	0,706	0,715	0,719
verbesserte Gleichung $\left\{ \begin{array}{l} v_{2\text{ber.}} = \\ v_{2\text{ber.}} = \end{array} \right.$	0,714		0,721	
		0,700		0,710
ursprüngl. Gl. $v_{2\text{ber.}} =$		0,580		0,585

Aus der Tabelle erkennt man in Übereinstimmung mit meinen früheren Resultaten, daß die verbesserte van der Waalssche Gleichung die Werte von v_2 richtig wiedergibt, während die ursprüngliche Gleichung vollständig versagt. Zum Schluß sei nochmals darauf hingewiesen, daß auch alle anderen bis jetzt vorliegenden Beobachtungsdaten (Dampfdrucke, Isothermen und wahrscheinlich auch das kritische Volumen) von der verbesserten Gleichung mit den von mir für die Konstanten a und b ermittelten Werten gut dargestellt werden, während die ursprüngliche sich auch hier nicht bewährt.²⁾

Tübingen, März 1910.

1) G. Rudolf, Ann. d. Phys. 29. p. 765. 1909.

2) H. Happel, Ann. d. Phys. 30. p. 175. 1909 und Physik. Zeitschr. 10. p. 1026. 1909.

(Eingegangen 28. März 1910.)

**8. Aufnahme von Elektrizität
aus der Luft durch fallende Wassertropfen;
von A. Schmauss.**

Über diesen Gegenstand hat vor kurzem Hr. R. Seeliger¹⁾ neue Versuche veröffentlicht, zu welchen ich an der Hand meiner früheren Beobachtungshefte einige Bemerkungen machen möchte.

In der Mitteilung im Jahre 1902²⁾ hatte ich dargelegt, daß Tropfen destillierten Wassers beim Falle durch ionisierte Luft *negative Ladung* aufnehmen, welche sich dem sogenannten Lenardeffekt überlagert und um so deutlicher zutage tritt, je mehr man diesen durch geeignete Versuchsbedingungen hintanhält.

Hr. Seeliger hat die Versuche mit Münchener Leitungswasser wiederholt und gezeigt, daß dieses aus gewöhnlicher Luft *keine negative Ladung* aufnimmt. Nur wenn die Luft mit Röntgenstrahlen ionisiert wurde, bekam er *während* der Tätigkeit der Röntgenröhre eine ganz schwache negative Ladung. Um das von mir erhaltene Resultat zu erklären, nimmt Hr. Seeliger einen „Aufladungseffekt“ an, d. h. durch Potentialdifferenz gegen das Schutzgehäuse sollte sich das isolierte Auffanggefäß in ionisierter Luft aufladen.

Im folgenden werde ich zu zeigen versuchen,

1. daß die Erklärung des Hrn. Seeliger nicht haltbar ist,
2. wodurch die Unstimmigkeit zwischen meinen Versuchen und denen des Hrn. Seeliger begründet erscheint.

1. Aufladungseffekt?

Wenn man elektrostatisch arbeitet, überzeugt man sich fortwährend, ob nicht bei isoliertem System irgendwelche

1) R. Seeliger, Ann. d. Phys. **31**. p. 500. 1910.

2) A. Schmauss, Ann. d. Phys. **9**. p. 224. 1902.

störenden Ladungen auftreten — durch Reibungselektrizität bei Aufheben der Erdleitung, durch Kontaktpotentialdifferenzen und dergleichen. — Wenn ein mit den übrigen Effekten konkurrierender Aufladungseffekt bei meinen Versuchen vorhanden gewesen wäre, hätte er sich zeigen müssen, auch *ohne daß der Wasserstrahl in Gang gesetzt wurde*. Das von mir benutzte Elektrometer, das im Mittel für 1 Volt etwa 30 Skt. Ausschlag gab, war zur Ermittlung solch kleiner Effekte nicht geeignet (Hr. Seeliger hatte eine Empfindlichkeit von 370 mm pro 1 Volt). In der Tat erhielt ich bei meiner Anordnung nach Aufhebung der Erdleitung nur ganz geringfügige Ausschläge.

Ein Aufladeeffekt hätte sich ferner in den zahlreichen Isolationsproben zeigen müssen, die ich angestellt habe. Ich führe aus meinem Beobachtungsjournal einen willkürlich herausgegriffenen Fall an.

System geladen auf -4 Volt.

Empfindlichkeit 30 Skt. für 1 Volt.

Elektrometerausschlag nach je 10 Sek. (Null 500, Anfangsstellung 380).

1. ohne vorherige Ionisation	383	385	388	390	393	395
2. nach vorheriger „	383	385	387	390	392	395

Wie man aus der Tabelle ersieht, waren die Ladungsverluste so überwiegend auf einen Elektrizitätsübergang über die isolierenden Fäden, an denen das Auffanggefäß hing, zurückzuführen, daß ein Elektrizitätsübergang vom Auffanggefäß durch die (eventuell ionisierte) Luft nach dem umgebenden Schutzgehäuse vernachlässigt werden durfte.

Ich führe noch eine andere Isolationsmessung an, bei welcher durch starke Lenardwirkung das Gefäß *positiv* geladen war. Dabei hätte sich ein „Aufladeeffekt“, der dem Gefäße *negative* Ladung mitzuteilen imstande gewesen wäre, ganz besonders zeigen müssen.

Nullpunkt 150, 1 Volt = 8 Skt.

Wasserstrahl abgestellt bei Elektrometerstand 861.

Rückgang der Ladung nach je 10 Sek:

860	859	858,5	857,5	856,5	855,5.
-----	-----	-------	-------	-------	--------

Es fand also bei einer Ladung von $+89$ Volt in 1 Min. ein Rückgang um 5 Skt. = $0,6$ Volt statt. Dieses war zufällig

auch der Betrag an *negativer* Ladung, welchen zu *Beginn des Versuches* das System durch den *Strahl* in weniger als 10 Sek. hatte mitgeteilt erhalten.

Im Kontrast zu diesen langsamen Elektrizitätsverlusten durch mangelhafte Isolation steht die Abnahme der positiven Ladung, wenn nach dem soeben angeführten Versuche der Wasserstrahl aufs neue einsetzte. Das Elektrometer ging dabei zuerst rasch um 10—15 Skt. *zurück*, die aber allerdings nicht als direktes Maß für die mitgeteilte Ladung angesprochen werden dürfen, da das Elektrometer ballistisch beansprucht wurde. Der Rückgang konnte nur dadurch zustande kommen, daß der einsetzende Strahl *zunächst negative* Ladung dem Gefäße mitteilte.

Daß der dem Lenardeffekt zu Beginn der Versuche sich überlagernde Effekt nicht durch eine Aufladung infolge einer Voltapentialdifferenz zu erklären ist, wird auch noch aus folgenden Versuchen hervorgehen, die ich ebenfalls im Jahre 1902 angestellt habe:

Der Strahl destillierten Wassers fiel durch gewöhnliche Luft auf die in meiner früheren Veröffentlichung erwähnte Messingplatte; nur war, um den Lenardeffekt etwas abzuschwächen, eine Lage von Messingdrahtgaze darüber gelegt.

Der Gang des Elektrometers nach je 10 Sek. (Nullpunkt 150, 1 Volt = 6 Skt.) war:

144	162	180	212	235	250
264	264	260	260	259	259 usw.

Jetzt wurde das Auffanggefäß auf —100 Volt geladen (Nullpunkt 700, Empfindlichkeit verringert 1 Volt = 5 Skt.), Anfangstellung 200.

192	211	255	350	520	690
820	940	1000			

Trotzdem also das Auffanggefäß bereits zu Beginn des Versuches auf —100 Volt geladen war, brachte der in Tätigkeit gesetzte Wasserstrahl anfangs doch *noch weitere negative Ladung*, so daß die ursprüngliche negative Ladung des Gefäßes vergrößert wurde.

Wenn nur der Lenardeffekt und eventuell ein „Aufladeeffekt“ wirksam wäre, dann müßte man als Gang des Elektro-

meters eine Kurve erwarten, welche in Fig. 1 durch 1 dargestellt ist; statt dessen ergaben zwei Versuche, bei welchen das Gefäß anfangs auf -100 Volt geladen war, die Kurven 2 und 3, ein Versuch mit einer anfänglichen Ladung von -50 Volt eine Kurve 4. Ich bemerke noch, daß die positiven

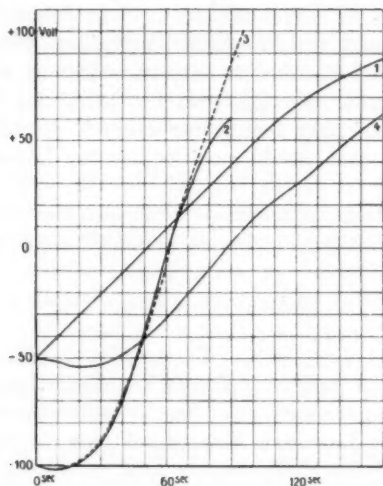


Fig. 1.

Aufladungen durch den Lenardeffekt wegen nicht ganz gleicher Versuchsbedingungen nicht miteinander zu vergleichen sind.

Ich habe mir schon damals für alle diese Versuche, welche zu Beginn des Strahles unbedingt eine *negative* Ladung erkennen lassen, die Frage vorgelegt, ob nicht vielleicht das destillierte Wasser ein wenig vom Materiale des Ausflußröhrchens und der daran anschließenden Zuleitung löse, so daß die ersten Wassertropfen einen *negativen* Lenardeffekt ergeben. In dieser Meinung konnte man noch durch die Tatsache bestärkt werden, daß die negative Ladung am deutlichsten auftrat, wenn der Strahl längere Zeit ausgesetzt hatte.

Diese Anschauung wurde aber dadurch hinfällig, daß eine ganz kurze Bestrahlung mit Röntgenstrahlen genügte, um den-

selben Effekt zu erreichen, wie nach stundenlangem Abschluß des Gefäßes.

Auch spricht sofort das Ergebnis dagegen, daß der Effekt am besten beobachtet werden konnte, wenn der Lenardeffekt möglichst ausgeschaltet wurde. Wäre die anfängliche negative Ladung auf eine durch schwache Lösung von Metall verursachte Umkehr der Doppelschichten zurückzuführen, dann müßte dieselbe um so deutlicher hervortreten, je besser sich der Lenardeffekt zeigen kann.

2. Die Versuche des Hrn. Seeliger.

Ich wende mich nun zu den Versuchen von Hrn. Seeliger und teile dieselben in solche, bei welchen *während* des Versuches die Röntgenstrahlen wirksam waren, und in solche, bei welchen erst *nach* Abstellen des Induktoriums der Wasserstrahl einsetzte.

a) *Während* des Abtropfens des Wassers die Röntgenstrahlen wirken zu lassen, halte ich für eine Erschwerung der Aufgabe. Ich habe mit guter Absicht in den der Veröffentlichung zugrundeliegenden Versuchen immer erst nach Abstellen des die Röhre speisenden Induktoriums den Strahl laufen lassen. Es lassen sich nämlich bei *gleichzeitiger* Wirksamkeit der Röhre eine Reihe von störenden Effekten aufzählen. Namentlich ist zu bedenken, daß die Röntgenstrahlen nicht bloß die Luft ionisieren, durch welche der Strahl fällt, sondern daß sie auch direkt den Strahl treffen. Ich könnte mir sehr wohl denken, daß die Lenardsche Doppelschicht dabei wesentliche Veränderungen erleidet, wenn sie der Ausgangspunkt von Sekundärstrahlen wird.

Es sei das Ergebnis eines derartigen Versuches mitgeteilt. Der Wasserstrahl lief, während die Röntgenstrahlen wirkten, und lief auch noch weiter, als das Induktorium abgestellt war. Folgendes sind die Ablesungen nach je 10 Sek. (1 Volt = 30 Skt., Nullpunkt 500)

mit Röntgenstrahlen	497,5	497,5	497,5	497,5	497,5	497,5
	497,5	497	497	497	497	497
Induktorium abgestellt	493	490	488	487	487	486
	485	485	484	484	484	484

Wie man sieht, wurden bei gleichzeitiger Wirkung der Röntgenstrahlen sogar kleinere negative Ausschläge erreicht. Ich konstatiere nur das Ergebnis, ohne auf eine Erklärung aus den oben angegebenen Gründen einzugehen.

b) Wie kommt es, daß Hr. Seeliger nach Abstellen der Röntgenröhre keine Aufnahme von negativer Ladung durch den Wasserstrahl beobachten konnte?

Hr. Seeliger hat in einem wesentlichen Punkte meine Versuche nicht wiederholt: er hat Münchener Leitungswasser benutzt, während ich für die veröffentlichten Versuche ausdrücklich destilliertes (gewöhnlich käufliches) Wasser zugrunde gelegt habe.

Ich war nun sehr erstaunt, daß Hr. Seeliger bei Verwendung von Münchener Leitungswasser eine schwach positive Aufladung als Lenardeffekt erhalten hat, während ich selbst im Jahre 1902 eine stark negative Lenardladung feststellen konnte. Sollte sich die Zusammensetzung des Wassers so sehr verändert haben? Allerdings ist ja der Lenardeffekt außerordentlich empfindlich auf ganz geringfügige Beimengungen des Wassers.

Von den nur gelegentlichen Versuchen, die ich damals mit Leitungswasser angestellt hatte, seien einige angeführt.

Nullpunkt 500, Empfindlichkeit 1 Volt = 30 Skt.

Stand des Elektrometers nach je 10 Sek.

1. nachdem das Gefäß offen gewesen war:

490	481	473	465	461	457
455	451	447	445	439	435

2. nach vorigem Versuche wurde die Luft mit Röntgenstrahlen ionisiert:

492	482	473	466	460	455
450	446	442	438	435	433

3. nachdem das Gefäß 16 Stunden geschlossen war:

491	480	473	466	460	455
451	447	445	442	440	438

4. Induktorium setzt ein, Strahl läuft weiter:

472	490	494	495	496	496
495	495	495	495	495	495

5. Induktorium abgestellt, Strahl läuft weiter:

487	478	469	463	457	455
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Aus diesen Versuchen sind folgende Schlüsse zu ziehen: Wenn das Münchener Leitungswasser ebenfalls eine Aufnahme negativer Ladung aus der Luft zeigen würde, dann müßten die negativen Ladungen, welche nach vorheriger Ionisation mit Röntgenstrahlen oder nach längerem Abschluß des Gehäuses vom Strahle dem Auffanggefäß mitgeteilt werden, *größere* Beträge aufweisen als ohne vorherige Ionisation; die „absorbierte“ negative Ladung müßte sich zu der durch den Lenardeffekt geschaffenen *addieren*. Wie man aus obigen Zahlen ersieht, war nach Ablauf von 1 Min. jedesmal eine negative Ladung von ca. 1,5 Volt erreicht, unabhängig davon, ob die Luft besonders ionisiert war oder nicht.

Es kann also das Ergebnis des Hrn. Seeliger für Münchener Leitungswasser durchaus bestätigt werden.

Da ich bei Anwendung von destilliertem Wasser andererseits so deutliche Effekte erhalten habe, liegt der Gedanke nahe, daß die Aufnahme von Ionenladung aus der Luft von der Art des Wassers abhängig ist.

Als Beleg hierfür kann ich einige Versuche mitteilen, deren Ergebnis ich im Jahre 1902 nicht weiter diskutiert habe, da es mir damals darum zu tun war, den Fall genau nachzubilden, welcher beim Regen stattfindet. Es wurden nämlich auch Versuche mit ClNa-Lösungen angestellt.

Dem Ergebnis dieser Versuche glaube ich erst jetzt, nach der Veröffentlichung des Hrn. Seeliger, die richtige Bedeutung beizumessen. Zunächst der entsprechende Auszug aus dem Tagebuch (vom 3. Februar 1902):

Nullpunkt 500. 1 Volt = 30 Skt.

Gefäß war 16 Stunden geschlossen gewesen.

1. Isolationsprüfung: System auf - 4 Volt geladen. Stand des Elektrometers nach je 10 Sek. (Anfang 380).

385	391	397	402	407	411
415	419	422	425	429	432

2. eine Reihe gleicher aufeinanderfolgender Versuche mit ca. 20proz. ClNa-Lösung

a)	494	490	487	483	481	479
b)	495	490	485	481	477	473
c)	493	486	480	475	470	466
d)	490	484	478	473	468	464

Nachdem längere Zeit der Strahl weitergelaufen war, ergab sich nach Aufhebung der Erdleitung:

e) 489 478 470 462 456 450

3. Isolationsprüfung (Anfangsstellung 380).

388 395 402 408 414 419
423 428 432 436 440 443

Trotzdem also durch die Tätigkeit des Strahles der ClNa -Lösung die Isolation im Laufe der Versuche schlechter geworden war, ergab sich, daß der Strahl, je länger er lief, um so größere negative Lenardwirkung anzeigte. Es macht also den Eindruck, als nähme ClNa -Lösung aus der Luft positive Ladung auf, die sich dem für diese Lösung negativen Lenardeffekt überlagere. Das Verhalten wäre demnach ein gegensätzliches zu dem von destilliertem Wasser.

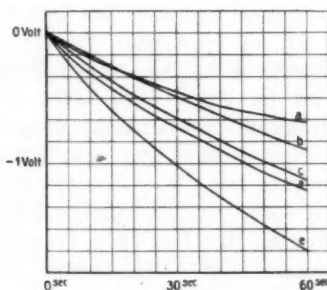


Fig. 2.

Die Fig. 2, in welcher die Versuche dargestellt sind, erscheint als das Spiegelbild der Fig. 4 in meiner früheren Mitteilung.

Ganz ähnlich wie bei den im Jahre 1902 beschriebenen Versuchen mit destilliertem Wasser zeigt sich auch für den mit ClNa -Lösung beobachteten Effekt eine allmähliche Regeneration der Luft nach Abstellen des Strahles. Ich führe eine andere Versuchsreihe an (ohne künstliche Ionisation) mit einer ca. 2,5 Proz. Lösung:

1. 495 492 490 487 485 484

Der Strahl lief noch weitere 8 Minuten. Der Endwert der Ladung war nahezu 2 Volt (Elektrometerstand 445).

2. Sofort anschließend neuer Versuch

488 477 469 463 459 455

3. Sofort anschließend nochmal

485 475 467 460 456 452

Auch bei diesen Versuchen war also das Ergebnis bestätigt: *Die in gleichen Zeiten erreichten Ladungen werden immer größer, je länger der Versuch dauert.* Nach dem letzten Versuch blieb der Strahl 25 Minuten abgestellt, das Auffanggefäß war abgeleitet. Als dann aufs neue ein Versuch gemacht wurde, ergab sich

4. 495 490 488 484 482 480

Auch dieses Resultat hat in den Versuchen mit destilliertem Wasser sein Analogon und *läßt sich ungezwungen erklären, wenn die Tropfen positive Ladung aus der Luft an sich ziehen.* Anstatt längere Zeit zu warten, bis die Atmosphäre regeneriert ist, kann man wiederum Röntgenstrahlen wirken lassen, was in der folgenden Versuchsreihe zum Ausdruck kommt.

Versuche mit ClNa-Lösung und Ionisation.

Der Strahl der ClNa-Lösung war längere Zeit gegangen; dann wurde die Erdleitung aufgehoben, worauf der Elektrometergang folgender war:

485 471 462 454 447 441

Nunmehr wurde die Luft mit Röntgenstrahlen ionisiert (alles genau wie bei den Versuchen mit destilliertem Wasser); es ergab sich

495 491 486 484 480 477

d. h. nach vorheriger Ionisation war der Lenardeffekt sehr vermindert, gerade als wenn die Tropfen positive Ladung aufnehmen würden.

Wie schon bei den Versuchen mit destilliertem Wasser vermied ich auch hier, die Röntgenstrahlen während des Versuches wirken zu lassen. Der Effekt der Bestrahlung be-

schränkte sich dann, wie man aus dem Vergleiche der Zahlen nach längerer Ruhe der Luft und nach Bestrahlung sieht, darauf, *den Zustand zu schaffen, der sich nach längerer Zeit auch ohne Bestrahlung einstellt.*

Ich benutzte als Schutzgehäuse ein altes Blechgefäß, in dem, wenn die von mir entwickelten Anschauungen über den Effekt richtig sind, eine große elektrische Leitfähigkeit vorhanden sein mußte. Leider wurde es versäumt, eine Messung derselben zu machen.

Den Vorgang der erhöhten Leitfähigkeit in dem *geschlossenen* Gefäße stelle ich mir folgendermaßen vor: Wenn wir das Gefäß geschlossen halten, wird sich allmählich eine erhöhte Leitfähigkeit einstellen, hervorgerufen durch einen schwach radioaktiven Inhalt. Der Grenzzustand ist erreicht, wenn in der Zeiteinheit ebenso viele Ionen erzeugt werden, als durch Rekombination verschwinden. Wenn wir nicht warten, bis sich von selbst dieser Endzustand einstellt, sondern mit Röntgenstrahlen ionisieren, schaffen wir in dem Raum eine erhöhte Leitfähigkeit, die sich rasch durch Rekombination der Ionen vermindert, *aber nur bis zu dem Restbetrage höherer Leitfähigkeit, den wir durch den schwach radioaktiven Einschluß erhalten.*

Ich habe, wie schon erwähnt, die Versuche mit ClNa -Lösung damals nur gelegentlich angestellt und darum auch keine besonderen Versuchsanordnungen getroffen, um den Lenardeffekt wegzubekommen. *Es scheint mir aber nunmehr sehr wahrscheinlich, daß man eine positive Ladung von ClNa -Tropfen müßte nachweisen können, wenn man den Lenardeffekt hintanhält.* Dieser ist ja außerordentlich abhängig von der Art des Aufpralles des Wassers auf das Hindernis.

Wenn z. B. die Metallplatte, auf welche der Strahl fällt, in akustische Schwingungen gerät, gibt sie ganz außerordentlich gesteigerte Wirkung; ich habe bei starkem Tönen der Platte im Verlaufe von 6 Minuten mit destilliertem Wasser das System auf mehr als + 100 Volt laden können, während ein ganz gleicher Versuch, bei welchem die Platte nicht tonte, nur etwa + 32 Volt ergab.

Ganz besonders gesteigert war die Wirkung, wenn der Ton in die Oktave übersprang.

Wenn auch zuzugeben ist, daß bei diesen Versuchen erst noch die Einwirkung des Tones auf den Strahl selbst zu untersuchen wäre, erscheint mir die Möglichkeit einer direkten Einwirkung der tönenden Platte auf den Lenardeffekt doch außer Zweifel zu stehen.

Der Lenardeffekt hängt von der Energie ab, mit welcher die Wassertropfen aufprallen; die Zerreißung der elektrischen Doppelschicht, durch welche nach Lenard der Effekt zu erklären ist, erfolgt um so vollständiger, je wuchtiger der Aufprall ist. Darum können Eigenvibrationen der Metallplatte sehr wohl die Aufladung steigern.

Schon ob die Metallplatte E (in der früheren Veröffentlichung) auf den Stiel aufgelötet, oder nur aufgesteckt war, war von großem Einfluß.

Erklärungsversuch der Resultate des Hrn. Seeliger.

Hr. Seeliger hat wohl von Anfang an den Lenardeffekt möglichst klein zu machen versucht, was ihm durch die schief gestellte Röhre sicher gut gelungen ist.

Dadurch kann ich nach den bisherigen Erörterungen mich des Gedankens nicht erwehren, daß auch heute noch, wie damals, das Münchener Leitungswasser eine negative Lenardladung gibt, und daß die schwache positive Ladung, welche Hr. Seeliger erhalten hat, gerade den von mir für Flüssigkeiten mit negativer Lenardwirkung wahrscheinlich gemachten Effekt der Aufnahme positiver Ladung aus der umgebenden Luft darstellt.

Da ich selbst leider nicht in der Lage bin, auf experimentellem Wege weiterhin die vorliegende Frage zu bearbeiten, fasse ich als Arbeitshypothese zusammen:

Beim Falle von destilliertem Wasser und von ClNa -Lösung durch ionenhaltige, Luft treten Anomalien im Lenardeffekt auf, welche sich am besten durch folgende Sätze erklären lassen:

1. Destilliertes Wasser, welches eine positive Ladung als Lenardeffekt aufweist, nimmt dabei negative Ladung auf.
2. ClNa -Lösungen (und wohl auch Münchener Leitungswasser), welche eine negative Ladung als Lenardeffekt ergeben, nehmen positive Ladung auf.

Das gegensätzliche Verhalten von destilliertem Wasser und von ClNa -Lösung beweist wohl am besten, daß der beobachtete Effekt nicht auf eine Aufladungswirkung, verursacht durch Voltapentialdifferenz der Metallteile, zurückgeführt werden kann.

Die unter 1. und 2. mitgeteilten Ergebnisse machen für den Effekt eine andere Erklärung nötig, als dies im Jahre 1902 geschehen ist. Da das Vorzeichen der aufgenommenen Ladung von der Zusammensetzung des Wassers abhängig ist, muß man *spezifische Kräfte* zwischen dem Flüssigkeitstropfen und den umgebenden positiven und negativen Ionen als wirksam annehmen. Für das Gedächtnis ist es einfach zu behalten, daß die Tropfen diejenigen Ionen an sich ziehen, deren Ladung entgegengesetzt ist mit ihrer eigenen, auf Grund der Lenardschen Doppelschicht eintretenden Ladung.

München, Meteorologische Zentralstation.

(Eingegangen 31. März 1910.)

Gas
die
pers

(1)

wo 2
Brech
 N_h d
meter
folgen

(2)

Dabei
tronen

E
einfac
Serie
zugesc
sätzlic

L
die E
dessen

1)
Dispers

**9. Über die Bestimmung
der Elektronenzahl aus der Dispersion;
von Clemens Schaefer.**

Bisher hat man den Dispersionsverlauf¹⁾ in leuchtenden Gasen, die Serien oder Banden emittieren, dargestellt durch die folgende (oder nur unwesentlich davon verschiedene) Dispersionsformel:

$$(1) \quad \nu^2 - 1 = \sum_h^{1,2} \frac{N_h M_h'}{T_h^2 - \frac{1}{T^2}},$$

wo T die Periode des einfallenden Lichtes, ν den zugehörigen Brechungsindex, T_h die Eigenperiode der h^{ten} Elektronenart, N_h die Anzahl der Elektronen dieser Gattung im Kubikzentimeter und M_h' eine zugehörige Konstante bedeutet, die durch folgende Gleichung definiert ist:

$$(2) \quad M_h' = \frac{e_h^2}{m_h \pi}.$$

Dabei ist m_h die Masse und e_h die Ladung der h^{ten} Elektronengattung.

Bei der Ableitung von (1) und (2) ist die folgende vereinfachende Annahme gemacht: Die verschiedenen Linien einer Serie werden jede für sich einer besonderen Elektronengattung zugeschrieben; die gegenseitigen Einflüsse werden dabei grundsätzlich vernachlässigt.

Die Tatsache steht jedenfalls fest, daß die Formel (1) die Erscheinungen quantitativ zu beschreiben vermag. Indessen darf hieraus nicht geschlossen werden, daß die obige

1) Die folgenden Betrachtungen gelten *mutatis mutandis* für alle Dispersionserscheinungen, z. B. die Magnetorotation.

Voraussetzung zutreffend ist. Dies wird im folgenden näher ausgeführt.

Die Gleichung (1) kann in folgender Weise benutzt werden: Aus der allgemeinen Elektronentheorie sind die Werte e_h und m_h bekannt, d. h., die Faktoren M_h' *a priori*, wie wir sagen wollen, gegeben. Aus der experimentell bestimmten Dispersion in der Umgebung einer Eigenperiode T_h läßt sich dann *a posteriori* N_h , „die Anzahl der Elektronen h^{ter} Gattung in der Volumeneinheit“, berechnen. Wenn nun dies für eine Reihe aufeinander folgender Serienlinien geschehen ist, d. h., wenn die Werte $N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 \dots N_s$ berechnet worden sind, so kann man von vornherein über die Verhältnisse dieser Zahlen zu einander nichts aussagen: Es ist vielmehr, da ja die verschiedenen Elektronengattungen ganz unabhängig voneinander sein sollen, *gar keine Gesetzmäßigkeit* in dieser Zahlenreihe zu erwarten. Würde man nun im Gegensatz dazu experimentell finden, z. B. daß $N_1 = N_2 = N_3 = \dots N_s$ ist, oder würde man finden, daß z. B. jedes folgende N in bestimmter Weise aus dem vorhergehenden ableitbar (etwa im selben Verhältnis kleiner¹⁾) ist, so würde man mit Recht schließen, daß die verschiedenen Elektronengattungen, oder besser ausgedrückt, daß die verschiedenen Linien der Serie *nicht unabhängig* voneinander sein können.

Stellt man sich aber auf diesen letzteren Standpunkt, so darf Gleichung (1) nicht mehr als bewiesen, sondern nur noch als empirisch brauchbare Gleichung angesehen werden. Insbesondere ist es dann fraglich, ob die Größen N_h und M_h' physikalisch wirklich so zu interpretieren sind, wie es hier geschehen ist und allgemein geschieht.

Es kann vom heutigen Standpunkte wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die obige Vorstellung, wonach eine Serie von s Linien von s verschiedenen, von einander unabhängigen Zentren

1) Diese letztere Annahme, daß die N , wenigstens von einer bestimmten Stelle ab, immer kleiner werden, läßt sich durch gewisse Betrachtungen sehr plausibel machen. Das jetzt vorhandene experimentelle Material reicht zur Bestätigung nicht aus. Im Sinne meiner späteren Ausführungen ist diese Abnahme der N nur scheinbar, und in Wirklichkeit anders zu interpretieren. — Ich hoffe bald über eine derartige experimentelle Untersuchung berichten zu können.

emittiert wird, *viel zu primitiv* ist, um mehr als eine rohe Annäherung an die Wirklichkeit zu geben. In der Tat weist die Gesamtheit der Gesetzmäßigkeiten, die von den Serienlinien bekannt sind, meines Erachtens zwingend darauf hin, dieses Bild durch ein weniger vereinfachtes und daher leistungsfähigeres zu ersetzen.

Es liegt am nächsten, das Emissionszentrum als ein Aggregat von Elektronen mit sehr vielen Freiheitsgraden zu betrachten. Man denke z. B. an die erste Hauptserie des Natriums, von der Wood etwa 50 Glieder beobachtet hat. Berücksichtigt man außerdem, daß jede dieser Linien noch magnetisch aufspaltbar ist, so kommt man schon auf eine sehr stattliche Anzahl von Freiheitsgraden. Wir wollen in der Tat diese Annahme machen und im folgenden das Emissionszentrum einfach als „System“ bezeichnen.

Um nun die mathematische Behandlung zu vereinfachen, ist es am zweckmäßigsten, statt des wirklich vorliegenden „Systems“ mit einer endlichen aber großen Zahl von Freiheitsgraden ein solches mit einer *unendlichen* Zahl zu betrachten. Diese Betrachtungsweise ist in der Elastizitätslehre die übliche: Eine Saite z. B. ist wegen der molekularen Struktur der Materie zweifellos ein „System“ mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden, welches aber der Einfachheit halber durch ein *kontinuierliches* Gebilde *approximiert* wird. Letzteres ist dann charakterisiert durch eine *partielle Differentialgleichung nebst Randbedingungen*.

Die nunmehr vorliegende mathematische Aufgabe habe ich schon früher behandelt¹⁾; ich habe dort einmal grundsätzlich gezeigt, wie man zu verfahren hat, und dann den allgemeinen Gedanken an zwei Spezialfällen näher erläutert. Man kommt auf diesem Wege zu der folgenden Dispersionsgleichung²⁾:

$$(3) \quad v^2 - 1 = \sum_h N \frac{M_h}{\frac{1}{T_h^2} - \frac{1}{T^2}},$$

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 28. p. 421. 1909; 29. p. 715. 1909.

2) Die in meinen früheren Arbeiten angegebenen Dispersionsformeln sehen etwas anders aus als die obige Gleichung (3), die mit Absicht der Gleichung (1) möglichst ähnlich gemacht worden ist. Man gelangt zu (3)

wo N die Anzahl der „Systeme“, M_h gewisse Konstanten bedeuten, die berechnet werden können, wenn die Konfiguration des „Systems“ bekannt ist. Die Konstanten M_h stellen also eine Eigenschaft des „Systems“ dar.

Die Summe in (3) geht streng genommen über alle Werte des Index h von 1 bis ∞ . Da aber die Reihe konvergent ist, so kann man sie auch nach einer hinreichend großen Zahl s von Gliedern ohne merklichen Fehler abbrechen; wir nehmen s gleich der in unserem Fall ja großen Zahl der Eigenperioden des *wirklichen* (nicht approximierten) „Systems“.

Man erkennt zunächst bei einem Vergleich von (1) und (3), daß beide Dispersionsgleichungen dieselbe Gestalt besitzen, daß also auch (3) bei geeigneter Konstantenbestimmung die Erscheinungen darzustellen imstande sein muß.

Nun ist in Wirklichkeit die nähere Natur des „Systems“ unbekannt; aus dem Verlauf der Dispersion kann man daher die Größen NM_h nur *a posteriori* (und zwar nur das Produkt, nicht beide Größen einzeln) bestimmen. Damit nun (1) und (3) beide die Erscheinung richtig wiedergeben, muß offenbar für jeden Wert von h die Beziehung bestehen:

$$(4) \quad NM_h = N_h M'_h.$$

in folgender Weise, wenn man z. B. die in meiner ersten Arbeit behandelte Differentialgleichung zugrunde legt: Ich benutze dort (p. 430, Gl. (19)) folgende Lösung der inhomogenen Integralgleichung:

$$(a) \quad \varphi(\xi) = f(\xi) + \lambda \sum_{\kappa} \frac{\varphi_{\kappa}(\xi)}{\lambda_{\kappa} - \lambda} \int_0^1 f(x) \varphi_{\kappa}(x) dx,$$

wobei die dortigen Bezeichnungen übernommen sind. Entwickelt man nun, was stets möglich ist, $f(\xi)$ auf die Fouriersche Weise nach Eigenfunktionen:

$$(b) \quad f(\xi) = \sum_{\kappa} \varphi_{\kappa}(\xi) \int_0^1 f(x) \varphi_{\kappa}(x) dx = \sum_{\kappa} c_{\kappa} \varphi_{\kappa}(\xi),$$

so erhält man statt der obigen Lösung die folgende:

$$(c) \quad \varphi(\xi) = \sum_{\kappa} c_{\kappa} \varphi_{\kappa}(\xi) \cdot \frac{\lambda_{\kappa}}{\lambda_{\kappa} - \lambda}.$$

Benutzt man diese Gleichung (c) weiter, statt der obigen (a), so erhält man die im Text angegebene Dispersionsformel (3). — In dieser Arbeit war übrigens der Einfachheit halber $N = 1$ gesetzt worden.

Man erkennt hier, daß noch eine vollkommen andere Interpretationsmöglichkeit des Produktes $N_h M'_h$ der alten Theorie vorliegt. Nach der alten Theorie ist für alle h

$$M'_h = \frac{e^2}{m \pi}$$

eine Konstante; N_h dagegen kann variieren.

Nach meiner Auffassung dagegen ist im Gegenteil N , die Zahl der „Systeme“, konstant, während die Größen M_h variieren können und im allgemeinen auch tun werden. Man kann daher in gewissem Sinne sagen, daß der ganze Unterschied zwischen den beiden oben dargelegten Auffassungen auf die verschiedene Interpretation der Produktfaktoren N und M herauskommt, die durch die beiden Seiten der Gleichung (4) angedeutet ist.

Es kann nun wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die zweite Auffassung, die die Emission der Serie einem „System“ von Elektronen zuschreibt, die richtigere ist. Dann ist aber auch die bisherige Interpretation der Größen N_h und M'_h aufzugeben: Man darf dann nicht mehr

$$M'_h = \frac{e^2}{m \pi}$$

setzen und ebensowenig die berechnete Zahl N_h als die Zahl der Elektronen h^{ter} Gattung in der Volumeinheit bezeichnen. Vielmehr hat man davon auszugehen, daß die Zahl der „Systeme“ konstant und die Größen M_h variabel sind. Man kann nun, da das „System“ noch unbekannt ist, allerdings nicht N und M_h gesondert erhalten, sondern nur das Produkt

$$N M_h (= N_h M'_h)^{1)}$$

Um daher weiterzukommen, wird man zweckmäßig so verfahren: man berechnet das Produkt, — das ja nach der alten und der neuen Theorie numerisch gleich ausfallen muß — für alle Werte h . Diese Zahlen stellen nach der neuen Anschauung (abgesehen von dem nicht störenden konstanten

1) Einer der nächsten Schritte müßte natürlich darin bestehen, auf andere Weise die Zahl N der „Systeme“ gesondert zu bestimmen, z. B. durch Leitfähigkeitsmessungen. Ohne neue Hypothese wird es dabei allerdings wohl kaum abgehen.

Faktor N) eine Eigenschaft des schwingenden „Systems“ quantitativ dar; sie liefern also einen Anhalt, um weitere Schlüsse auf die Natur desselben zu ziehen. Nicht aber stellen nach meiner Auffassung diese Zahlen (abgesehen von dem konstanten Faktor $M_h' = e^2/m\pi$) die Anzahl der Elektronen der betreffenden Gattung dar.¹⁾

Dieser Gesichtspunkt ist bisher nicht hervorgehoben worden; es schien mir von Interesse, ihn — auch aus heuristischen Gründen — zu betonen, weil diese Betrachtung zeigt, daß wir hier ein Mittel haben, um der Natur des Emissionszentrums der Serien näher zu kommen.

Breslau, Physik. Inst. d. Univ., im März 1910.

1) Man kann sich leicht klar machen, daß die hier aus speziellen Voraussetzungen über die Differentialgleichung des schwingenden „Systems“ abgeleitete Dispersionsformel (3) tatsächlich viel allgemeiner ist; insbesondere heißt das Auftreten des Faktors N ja offenbar nichts anderes, als daß von den gegenseitigen Einwirkungen der „Systeme“ auf einander abgesehen wird. Der andere Faktor

$$\frac{M_h}{\frac{1}{T_h^2} - \frac{1}{T^2}}.$$

ist aber ein allgemeiner Charakter aller Dispersionserscheinungen.

(Eingegangen 31. März 1910.)

Berichtigung zur Abhandlung Lebedew

(Bd. 32. p. 435).

3. Zeile v. o. statt $7,6 \cdot 10^6$ Ergs pro Sek. soll heißen:
 $7,6 \cdot 10^6 T_0$ Ergs pro Sek.

15. Zeile v. o. statt $2,5 \cdot 10^{-4}$ Dyne pro qcm soll heißen:
 $2,5 \cdot 10^{-4} \alpha T_0$ Dyne pro qcm.

